МАТЕМАТИКА

Муравей Л. А.
Кулакова Р. Д.
Миронов А. А.
Симонов А. А.
Гладышев В. М.

Учебное пособие

«БРИДЖ»

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Под редакцией
проф., д.ф.-м.н. Муравья Л.А.

Рекомендовано Государственным Комитетом РФ по высшему образованию в качестве учебного пособия учащимся 9-11 классов и абитуриентам для подготовки в технические университеты

Москва
БРИДЖ
1994 г.

Коллектив авторов:

Муравей Леонид Андреевич, проф., д.ф.-м.н.,
Кулакова Раиса Дмитриевна, доц., к.т.н.,
Миронов Анатолий Анатольевич, доц., к.ф.-м.н.,
Симонов Александр Анатольевич, доц., к.ф.-м.н.,
Гладышев Владимир Михайлович, ст. преп.

Под редакцией проф., д.ф.-м.н. Муравья Л.А.

Издание подготовлено при содействии Государственного комитета по высшему образованию РФ и Московского государственного авиационного технологического университета (МАТИ им. К.Э. Циолковского).

МАТЕМАТИКА. Пособие для углубленного изучения математики для учащихся средних школ и поступающих в технические университеты.
М.: БРИДЖ, 1994 — 180 с.

Представлены все разделы программы по математике для поступающих в технические университеты и комплекс задач по каждому из разделов программы. По каждой из тем приведены подробные решения задач, составленные так, чтобы их изучение позволило читателю освоить теорию и получить практические навыки решения задач, достаточные для успешной сдачи вступительного экзамена в технические университеты по математике.

Практически все задачи, приведённые в пособии, апробированы в течении последних пяти лет в школах и лицеях при Московском государственном авиационном техонологическом университете (МАТИ им. К.Э. Циолковского).

Предназначено для углубленного изучения математики и подготовки к вступительным экзаменам в технические университеты. Может быть полезно для учителей и классов с углубленной математической и компьютерной подготовкой, а также для преподавателей и студентов педагогических университетов и вузов.

Издательство «Бридж» выражает признательность ГП «Центр элитарного обучения» за помощь, оказанную при издании настоящего учебного пособия.

Техническое редактирование, компьютерная верстка и компьютерный макет
Сергей Мухалов,
издательство «Бридж», Москва,
ISBN 5-85959-051-2, заказ № 981.

Бумага офсетная, 70x100, 1/16, 11п.л., тираж 25000 экз. Заказ 4626

Отпечатано с готовых диапозитивов
в полиграфической фирме «КРАСНЫЙ ПРОЛЕТАРИЙ»
103473, Москва, Краснопролетарская, 16.

Занятие №1

Понятие числа в математике. Преобразования алгебраических выражений

В этом занятии мы коснёмся некоторых вопросов, относящихся к понятию числа в математике, упомянём основную теорему арифметики и основную теорему алгебры, рассмотрим преобразования алгебраических выражений (в первую очередь многочленов).

1. Делимость целых чисел

Говорят, что целое число a делится на целое число b, если существует такое целое число k, что $a = k \cdot b$. В этом случае говорят также, что b является делителем a (делит a). Натуральное число, не имеющее других делителей, кроме себя самого и единицы, называется простым. Два числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель (сокращённо НОД) равен 1. Справедлива следующая теорема, называемая основной теоремой арифметики.

Теорема 1. *Каждое натуральное число единственным образом разлагается в произведение простых сомножителей.*

Рассмотрим несколько задач на данную тему.

Задача 1. *Доказать, что, если выражение $m^2 + n^2$, где m и n — натуральные числа, делится на 4, то m и n — чётные числа.*

Решение: Если m чётно, т.е. $m = 2 \cdot k$, где k — натуральное число, то ясно, что m^2 делится на 4. Для нечётного m возможны два остатка при делении на 4: $m = 4k + 1$ или $m = 4k + 3$ при некотором натуральном k. В первом случае

$$m^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4 \cdot (4k^2 + 2k) + 1,$$

во втором

$$m^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4 \cdot (4k^2 + 6k + 2) + 1,$$

т.е. в любом случае остаток при делении на 4 квадрата нечётного числа равняется 1. Поэтому условию задачи не удовлетворяют ни пара нечётных чисел, ни пара, в которой одно число является чётным, а другое — нечётным.

Задача 2. *Доказать, что выражение* $(2n + 7^n)^2 + 7$ *делится на* 8 *при любом натуральном* n.

Решение: Легко проверить (аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче), что квадрат любого нечётного числа даёт в остатке при делении на 8 единицу. Остаётся теперь заметить, что число $2n + 7^n$ является нечётным.

Задача 3. *Доказать, что выражение* $n^5 - n$ *делится на* 30 *при любом натуральном* n.

Решение: Известно, что произведение пяти последовательных целых чисел делится на 5, а произведение трёх последовательных целых чисел кратно 6, поэтому произведение пяти последовательных целых чисел делится на 30.

Имеем:

$$n^5 - n = n \cdot (n^4 - 1) = n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1).$$

Рассмотрим разность:

$$n \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) - n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) =$$
$$= n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 - 4 - n^2 - 1) = -5n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) = 30m,$$

где m — натуральное число. Таким образом, уменьшаемое и разность кратны 30. Следовательно, и вычитаемое также кратно 30, что и требовалось доказать.

Задача 4. *Доказать, что выражение* $26n + 5^{n+2} + 18^n$ *делится на* 13 *при любом натуральном* n.

Решение: Преобразуем данное выражение к виду:

$$26n + 5^{n+2} + 18^n = 26n + 25 \cdot 5^n + 18^n =$$
$$= 26 \cdot (n + 5^n) + 18^n - 5^n.$$

Легко видеть, что в последнем соотношении первое слагаемое делится на 13, делимость же второго слагаемого на 13 вытекает из известного равенства:

$$(a^n - b^n) = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) .$$

Таким образом, задача решена.

Числа, представимые в виде отношения двух целых чисел $\frac{m}{n}$, называются рациональными. Приведём здесь одну теорему, относящуюся к рациональным корням многочленов с целыми коэффициентами. Эта теорема окажется полезной в наших дальнейших рассуждениях.

Теорема 2. *Если многочлен с целыми коэффициентами*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то p является делителем свободного члена a_n, а q является делителем коэффициента при старшем члене a_0.

2. Рациональные и иррациональные числа

Из школьного курса известно, что целый ряд задач (извлечение корней из рациональных чисел, вычисление логарифмов, тригонометрических функций, нахождение общей меры отрезков произвольной длины и др.) приводит к обобщению понятия рационального числа. Так появляются новые числа, называемые иррациональными, которые вместе с рациональными числами образуют множество действительных чисел. Рассмотрим несколько задач, в которых фигурируют эти понятия.

Задача 5. *Доказать иррациональность числа* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Рассмотрим два способа решения поставленной задачи.

Первый способ.

Введём обозначение $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Предположим, что x — число рациональное. После возведения в квадрат перепишем это сотношение в виде $\sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2}$, из чего вытекает рациональность числа $\sqrt{6}$. Но это неверно. Действительно, предположим, что

$\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, где m и n взаимно просты. Возводя в квадрат, получим $m^2 = 6n^2$. Отсюда следует, что m делится на 2. Но тогда $m = 2k$ и предыдущее соотношение можно записать в виде $4k^2 = 6n^2$, что после сокращения на 2 даёт $2k^2 = 3n^2$. Теперь мы получаем, что n чётно, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Второй способ.

Сохранив обозначение $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, возведём обе части в квадрат и полученное равенство запишем в виде: $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Возводя ещё раз в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем уравнение

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

По теореме 2 рациональными корнями последнего уравнения могут быть только числа ± 1. Непосредственной проверкой убеждаемся, что ни то, ни другое число не обращает уравнение в тождество, поэтому рациональных корней у уравнения нет. Но уравнение было нами сконструировано так, чтобы число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ являлось его корнем. Отсюда вытекает иррациональность этого числа.

Можно доказать, что иррациональными являются значения тригонометрических функций таких, как sin, cos, tg, ctg для углов, выражающихся целым числом градусов, минут и секунд, за исключением хорошо известных случаев (например, $\sin 0°$, $\sin 90°$, $\cos 60°$, $\operatorname{tg} 45°$ и т.д.). Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача 6. *Доказать иррациональность числа* $\sin 10°$.

Решение: Предположим противное. Тогда, применяя формулу косинуса двойного угла, получим, что

$$\cos 20° = 1 - 2\sin 10°$$

является рациональным числом. С другой стороны, можем применить формулу косинуса тройного угла, согласно которой

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°.$$

Введём обозначение $x = \cos 20°$. Тогда, вспоминая, что $\cos 60° = \frac{1}{2}$, будем иметь

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x,$$

или

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Таким образом, число $x = \cos 20°$ является корнем последнего уравнения. Но по теореме 2 его единственно возможными рациональными корнями являются числа $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$. Однако, в действительности ни одно из них корнем не является, в чём легко убедиться непосредственной подстановкой. Полученное противоречие доказывает иррациональность числа x, а вместе с ним и исходное утверждение.

Легко можно также установить, что иррациональными являются значения логарифмической функции (например, десятичных логарифмов) при натуральном аргументе, кроме некоторых частных случаев (когда, например, под знаком логарифма стоит целая степень числа 10).

Задача 7. *Доказать иррациональность числа* $\lg 4$.

Решение: Доказательство основывается на теореме 1. Предположим, что $\lg 4 = \frac{m}{n}$, где m и n — положительные целые числа (легко понять, что $\lg 4 > 0$). Тогда по определению логарифма можем записать

$$4 = 10^{\frac{m}{n}}.$$

Возводя обе части этого равенства в степень n, получим

$$4^n = 10^m,$$

или

$$2^{2n} = 2^m \cdot 5^m.$$

Так как в разложение числа, стоящего в правой части полученного равенства, на простые множители входит число 5 ($m > 0$), а в разложении левой части такой множитель отсутствует, получаем противоречие, которое доказывает исходное утверждение.

3. Преобразования алгебраических выражений. Разложение многочленов на множители

Важную роль в процессе освоения математики, кроме умения работать с числами, занимает умение правильно преобразовывать, упрощать, разлагать на множители алгебраические выражения.

Техника алгебраических преобразований является вспомогательным, но очень важным моментом в решении задач самых разных типов. В связи с этим важно хорошо натренировать эту технику: не зазубривание, а регулярное использование является лучшим способом запомнить и научиться правильно использовать алгебраические (как, впрочем, и любые другие) формулы.

Основным объектом применения алгебраических преобразований являются многочлены и дробно-рациональные функции, т.е. дроби вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены.

Основные формулы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2).$$

Рассмотрим в связи с этим простой пример, чтобы продемонстрировать применение этой техники.

Задача 8. *Упростить выражение*

$$\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Решение: Приведём вначале выражения в скобках к общему знаменателю (это рекомендуется делать всегда, потому что с одной дробью работать проще, чем с несколькими слагаемыми) и разложим на множители, чтобы иметь возможность произвести сокращение.

Выражение в первой скобке имеет общий знаменатель xy^3 и при использовании формулы суммы кубов преобразуется к виду

$$\frac{x^3 + y^3}{xy^3} = \frac{(x+y)\cdot(x^2 - xy + y^2)}{xy^3}.$$

Во второй скобке наименьший общий знаменатель равен xy^2. Использование в качестве общего знаменателя произведения знаменателей всех трёх дробей формально не является ошибкой, но совершенно неоправданно усложняет вычисления. При этом вторая скобка преобразуется к виду

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{xy^2}.$$

Для последней дроби вначале приведём к общему знаменателю её знаменатель, записав его в виде

$$\frac{x + y}{x},$$

и раскроем скобки в числителе. Это правило — в слагаемых (но не в произведении) раскрывать скобки — также можно считать общим. После приведения подобных членов и использования формулы квадрата суммы получим

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2 + 4xy}{\dfrac{x + y}{x}} = \frac{x \cdot (x^2 + 2xy + y^2)}{x + y} = \frac{x \cdot (x + y)^2}{x + y} = x \cdot (x + y)\,.$$

Подставляя преобразованные выражения вместо каждой из скобок, получаем, в соответствии с правилами операций над дробями, выражение

$$\frac{(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)}{xy^3} \cdot \frac{xy^2}{x^2 - xy + y^2} \cdot \frac{1}{x \cdot (x + y)}\,.$$

После сокращения остаётся $\dfrac{1}{xy}$.

Ответ: $\dfrac{1}{xy}$.

Для разложения на множители многочленов основой является следующее следствие из теоремы Безу:

Теорема 3. *Если a — корень многочлена $f(x)$, то*

$$f(x) = (x - a) \cdot g(x),$$

где $g(x)$ — некоторый многочлен.

Из этой теоремы следует

Теорема 4. *Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена n-й степени с коэффициентом a_0 при x_n, то*

$$f(x) = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Особенно просто применяется теорема Безу в случае многочленов второй степени, поскольку для них существует простая формула для корней.

Если для многочлена $ax^2 + bx + c$ дискриминант $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$, то корни многочлена равны

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Эта формула, разумеется, хорошо известна всем школьникам, но, тем не менее, полезно ещё раз подчеркнуть её важность, поскольку на её использовании основывается, видимо, большая часть школьных задач по математике. Ввиду частоты применения этой формулы полезно запомнить её частный случай: если $b = 2 \cdot k$, т.е. многочлен имеет вид $ax^2 + 2kx + c$, то его корни вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a},$$

где $\frac{D}{4} = k^2 - ac$. Особенно полезна эта формула при $a = 1$.

Рассмотрим примеры разложения на множители квадратных трёхчленов.

Задача 9. *Разложить на множители многочлен* $x^2 - 6x + 8$.

Решение: Применим второй вариант формулы корней квадратного уравнения при $a = 1$, $k = -3$ и $c = 8$. Получим, что $\frac{D}{4} = (-3)^2 - 8 = 1$, т.е. $x_1 = 3 + 1 = 4$, $x_2 = 3 - 1 = 2$.

Ответ: $(x - 4) \cdot (x - 2)$.

Задача 10. *Разложить на множители многочлен* $2x^2 + 5x + 2$.

Решение: Применим формулу корней квадратного уравнения при $a = 2$, $b = 5$ и $c = 2$. Получим, что $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$, т.е.

$$x_1 = \frac{-5 + 3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 - 3}{4} = -2.$$

Разложение на множители приобретает вид

$$2\cdot(x+\frac{1}{2})\cdot(x+2).$$

Чтобы избавиться от дробей, удобно умножить на коэффициент 2 первую скобку.

Ответ: $(2x+1)\cdot(x+2)$.

Приведённый метод не срабатывает, если дискриминант D квадратного трёхчлена оказывется отрицательным. В школе в этом случае часто говорят, что квадратный трёхчлен не имеет корней. Точнее будет сказать, что он не имеет вещественных корней, поскольку использование «мнимой единицы» i, определелнёной условием $i^2=-1$, даёт возможность извлекать корни и из отрицательных чисел по правилу $\sqrt{D}=\pm i\sqrt{-D}$ и тогда

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{D}}{2a}.$$

Для многочленов произвольной степени имеет место следующая теорема, называемая основной теоремой алгебры.

Теорема 5. *Любой многочлен (с вещественными или комплексными коэффициентами) имеет корень, вообще говоря, комплексный.*

Теорема Безу остается справедливой и в случае комплексных корней, но в этом случае и множители являются комплексными. Если требуется разложить многочлен на множители с вещественными коэффициентами, то, основываясь на основной теореме алгебры, можно показать, что любой мночлен с вещественными коэффициентами можно разложить на множители вида $(x-a)^n$ или $(x^2+px+q)^m$ $(n, m\geqslant 1)$ с вещественными коэффициентами.

Задача разложения на множители многочленов высших степеней (третьей, четвёртой и выше) с целыми коэффициентами упрощается, если удаётся подобрать какой-либо корень этого уравнения. Здесь полезной оказывается теорема 2.

Задача 11. *Разложить на множители многочлен*

$$x^3-4x^2+x+6.$$

Решение: Свободный член 6 делится нацело на 1, 2, 3, и 6, поэтому целые корни этого многочлена надо искать среди чисел ± 1, ± 2, ± 3 и ± 6. Подставляя эти значения в многочлен, получим, что $f(1)=4$, т.е. единица не является корнем, $f(-1)=0$, так что $x_1=-1$, $f(2)=0$, т.е. $x_2=2$, $f(-2)=-20$, поэтому -2 не является корнем и $f(3)=0$, т.с. $x_3=3$. Многочлен третьей степени не может иметь более трёх корней (это ясно из теоремы 4), поэтому все корни найдены.

Ответ: $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$.

На практике после нахождения первого корня подстановку прерывают и определяют многочлен $g(x)$ (в обозначениях теоремы 3), пользуясь алгоритмом деления многочленов. Суть алгоритма аналогична правилу деления целых чисел «углом»: старший член делимого делится на старший член делителя, результат добавляется в частное, а из делимого вычитается делитель, умноженный на полученное слагаемое, после чего эти операции повторяются с оставшейся частью делимого. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Задача 12. *Разделить многочлен* $x^4-2x^3-2x+15$ *на многочлен* x^2+2x+3.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3\phantom{{}-3x^2}-2x+15 & x^2+2x+3 \\
\cline{2-2}
x^4+2x^3+3x^2\phantom{{}-2x+15} & x^2-4x+5 \\
\cline{1-1}
-4x^3-3x^2-2x\phantom{{}+15} & \\
-4x^3-8x^2-12x\phantom{{}+15} & \\
\cline{1-1}
5x^2+10x+15 & \\
5x^2+10x+15 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Решение: Поясним некоторые моменты вычислений. Значение x^2 в частном получается при делении старшего члена x^4 делимого на старший член x^2 делителя. Многочлен $x^4+2x^3+3x^2$ получен при умножении делителя x^2+2x+3 на первое слагаемое частного x^2. Многочлен $-4x^3-3x^2-2x$ получается при вычитании и добавлении очередного слагаемого $-2x$, в частности, $-2x^3-2x^3=-4x^3$, а $0-3x^2=-3x^2$ (0 — поскольку в делимом не было слагаемого с x^2). Слагаемое частного $-4x$ получено при делении $-4x^3$ на x^2, а слагаемое 5 — при делении $5x^2$ на x^2. Поскольку остаток от деления равен 0, результат дает разложение многочлена на множители:

$$x^4-2x^3-2x+15=(x^2+2x+3)\cdot(x^2-4x+5).$$

Ответ: Частное равно (x^2-4x+5).

Используем этот метод вместе с правилом поиска рациональных корней.

Задача 13. *Разложить на множители многочлен*

$$2x^4-5x^3+3x^2+x-1.$$

Решение: Подставляя вместо x единицу, получаем, что многочлен обращается в 0, т.е. первый корень $x_1=1$, и многочлен делится на $x-1$. Выполняем деление углом:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 & x - 1 \\
\underline{2x^4 - 2x^3} & \overline{2x^3 - 3x^2 + 1} \\
\quad - 3x^3 + 3x^2 & \\
\quad \underline{- 3x^3 + 3x^2} & \\
\qquad\qquad x - 1 & \\
\qquad\qquad \underline{x - 1} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Для полученного многочлена $2x^3 - 3x^2 + 1$ вновь убеждаемся, что единица является корнем, т.е. $x_2 = 1$.

Повторяем деление:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 - 3x^2 + 1 & x - 1 \\
\underline{2x^3 - 3x^2} & \overline{2x^2 - x - 1} \\
\quad - x^2 + 1 & \\
\quad \underline{- x^2 + x} & \\
\qquad - x + 1 & \\
\qquad \underline{- x + 1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Решая полученное уравнение, находим его корни $x_3 = \dfrac{1 + 3}{4} = 1$ и $x_4 = \dfrac{1 - 3}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Поскольку $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, разложение на множители запишется в виде:

$$2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = 2 \cdot (x - 1)^3 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)^3 \cdot (2x + 1) .$$

Ответ: $(x - 1)^3 \cdot (2x + 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что при простом натуральном $n \geqslant 5$ число $n^2 - 1$ делится на 24.

2. Доказать, что при любом натуральном n выражение $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ делится на 17.

3. При каких натуральных n будут взаимно просты числа $n^2 + 1$ и $n + 3$?

4. Доказать, что число $\lg 5 + \lg 3$ иррационально.

5 Доказать, что число $\operatorname{tg} 1^\circ$ иррационально.

6. Доказать, что число $2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{2}}$ иррационально.

7. Упростить выражение

$$\frac{x^{-6} - 64}{4 + 2x^{-1} + x^{-2}} \cdot \frac{x^2}{4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{4x^2 \cdot (2x + 1)}{1 - 2x}.$$

8. Упростить выражение

$$\frac{2b + a - \frac{4a^2 - b^2}{a}}{b^3 + 2ab^2 - 3a^2b} \cdot \frac{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}{a^2 - b^2}.$$

9. Определить корни и разложить на множители многочлен

$$x^3 + 6x^2 + 5x - 12.$$

10. Определить корни и разложить на множители многочлен

$$x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 22x + 8.$$

11. Определить корни и разложить на множители многочлен

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12.$$

Занятие № 2

Решение алгебраических уравнений

Решение алгебраических уравнений первой и второй степеней хорошо известно из школьного курса. В случае существования целых корней квадратного уравнения их нахождение облегчает

Теорема Виета. *Если квадратное уравнение*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет вещественные корни, то сумма корней равна $-\frac{b}{a}$*, а произведение корней равно* $\frac{c}{a}$.

Часто полезной бывает

Обратная теорема Виета. *Если существуют действительные числа* x_1, x_2 *такие, что*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

то числа x_1 *и* x_2 *являются корнями уравнения*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Задача 1. *Найти сумму кубов корней уравнения*

$$3x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Решение:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) =$$

$$= \frac{5}{3}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{80}{27}.$$

Ответ: $\frac{80}{27}$.

Известно, что не существует общих формул, выражающих корни алгебраического уравнения пятой степени и выше через коэффициенты уравнения при помощи радикалов. Поэтому решение уравнений высокого порядка основано на понижении их порядка с помощью подходящей замены. Рассмотрим некоторые типы таких уравнений.

1. Биквадратные уравнения. *Биквадратными называются уравнения вида*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где a,b,c — заданные числа, причём $a \neq 0$. Такие уравнения решаются заменой $y = x^2$.

Задача 2. *Решить уравнение:*

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Решение: Произведя замену $y=x^2$ и решив соответствующее квадратное уравнение, найдём, что $y_1 = -1, y_2 = 9$. Первое решение отбрасываем ($y \geqslant 0$), а из второго находим $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Аналогично решаются уравнения несколько более общего вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

где n — любое натуральное число, $a \neq 0$.

2. Симметрические уравнения. *Решение симметрических уравнений рассмотрим на примере симметрических уравнений третьего порядка. К ним относятся уравнения вида*

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

или

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0,$$

где a и b — заданные числа, причём $a \neq 0$.

Задача 3. *Решить уравнение:*

$$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0.$$

Решение: В симметрических уравнениях указанного вида всегда имеется корень $x = 1$ или $x = -1$. Разлагая далее левую часть на множители, получим

$$(x - 1) \cdot (3x^2 - 10x + 3) = 0.$$

Решая полученное уравнение, получаем

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = 3.$

3. Возвратные уравнения. *Решение возвратных уравнений рассмотрим на примере уравнений четвёртого порядка. Таковыми являются уравнения вида*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + \lambda bx + \lambda^2 a = 0,$$

где a, b и c — заданные числа, причём $a \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

Так как $x = 0$ не является корнем данного уравнения, то, разделив на x^2 обе части уравнения, получим уравнение, эквивалентное данному:

$$ax^2 + bx + c + \frac{\lambda b}{x} + \frac{\lambda^2 a}{x^2} = 0.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$a \cdot \left(x + \frac{\lambda}{x}\right)^2 + b \cdot \left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + c - 2a\lambda = 0.$$

Таким образом, получено квадратное уравнение относительно $t = x + \frac{\lambda}{x}$.

Задача 4. *Решить уравнение:*

$$2x^4 - 3x^3 - 19x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Решение: Производя, согласно вышесказанному, замену $t = x + \frac{2}{x}$, получаем уравнение

$$2t^2 - 3t - 27 = 0.$$

Его корни: $t_1 = -3$, $t_2 = \frac{9}{2}$.

Возвращаясь к x, приходим к квадратным уравнениям

$$x + \frac{2}{x} = -3 \text{ и } x + \frac{2}{x} = \frac{9}{2}.$$

Решая их, получаем

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 4$.

4. Понижение порядка уравнения с помощью подходящей замены.

Задача 5. *Решить уравнение:*

$$\frac{3x}{x^2 - 2x + 4} + \frac{4x}{x^2 - x + 4} = 2.$$

Решение: Разделив числитель и знаменатель обеих дробей на x, получим

$$\frac{3}{x - 2 + \frac{4}{x}} + \frac{4}{x - 1 + \frac{4}{x}} = 2.$$

Произведём замену $t = x + \frac{4}{x}$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\frac{3}{t-2} + \frac{4}{t-1} = 2,$$

что даёт квадратное уравнение для t:

$$2t^2 - 13t + 15 = 0.$$

Решая его, находим $t_1 = 5$, $t_2 = \frac{3}{2}$. Для x получаются два уравнения:

$$x + \frac{4}{x} = 5 \text{ и } x + \frac{4}{x} = \frac{3}{2}.$$

Первое из них имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, второе действительных корней не имеет.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 4$.

В общем случае при решении уравнений важно следить за равносильностью проводимых преобразований, не изменяющих множества решений. Часто приходится прибегать к действиям, которые могут нарушить равносильность (возведение в квадрат, приведение к общему знаменателю и т.д.). В этом случае получаются уравнения, являющиеся следствиями исходных, т.е. содержат в себе все решения исходных уравнений, но,может быть, и посторонние корни. Далее возможны два подхода к решению. Первый состоит в том, что все полученные решения мы подвергаем проверке, т.е. подставляем в исходное уравнение и отбрасываем «лишние» корни (этот путь годится только для уравнений — для неравенств он не проходит). При втором подходе мы находим ОДЗ (область допустимых значений) уравнения и разбиваем её на подобласти таким образом, чтобы в каждой подобласти проводимые преобразования были равносильны. В решения мы включаем только те корни, которые принадлежат соответствующим подобластям. Проиллюстрируем вышесказанное на примерах.

5. Уравнения с модулем. Напомним, что по определению модуль числа x вычисляется по формуле

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Задача 6. *Решить уравнение*

$$|x^2 + 2x - 3| = 3x + 3.$$

Решение: Для того, чтобы правильно раскрыть знак модуля, необходимо определить, при каких значениях x выражение $x^2 + 2x - 3$ неотрицательно. Поскольку корни этого квадратного трёхчлена равны -3 и 1, получаем, что

$$|x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & \text{если } x \leqslant -3 \text{ или } x \geqslant 1 \\ -x^2 - 2x + 3, & \text{если } -3 < x < 1 \end{cases}$$

Соответственно, получаем два случая:

а) $x \leqslant -3$ или $x \geqslant 1$.

Уравнение имеет вид $x^2 + 2x - 3 = 3x + 3$ или $x^2 - x - 6 = 0$. Его корни $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Первый из этих корней удовлетворяет условию $x \geqslant 1$, а для второго оба условия $x \leqslant -3$ и $x \geqslant 1$ не выполняются, т.е. этот корень — посторонний.

б) $-3 < x < 1$.

Получаем уравнение $-x^2 - 2x + 3 = 3x + 3$, т.е. $x^2 + 5x = 0$. Его корни $x_3 = 0$, $x_4 = -5$. Для первого из них условие $-3 < x < 1$ выполнено, а для второго условие $-3 < x < 1$ не выполняется, поэтому корень x_4 — посторонний.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$.

Для уравнений, содержащих модули, может возникнуть качественно новая ситуация, когда решения целиком заполняют некоторый отрезок:

Задача 7. *Решить уравнение*

$$|x - 2| + |2x + 4| = x + 6.$$

Решение: По определению модуля

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x \geqslant 2 \\ -x + 2, & \text{если } x < 2 \end{cases}$$

$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } x \geqslant -2 \\ -2x - 4, & \text{если } x < -2 \end{cases}$$

Изменения в используемых формулах происходят при $x = -2$ и $x = 2$, поэтому, как и в предыдущей задаче, рассматриваем три случая:

а) $x < -2$.
Уравнение приобретает вид

$$-x + 2 - 2x - 4 = x + 6$$

и имеет корень $x = -2$, который не удовлетворяет условию $x < -2$.

б) $-2 \leqslant x < 2$.
Получаем уравнение

$$-x + 2 + 2x + 4 = x + 6,$$

т.е. $x + 6 = x + 6$ — верное тождество. Следовательно, все числа из промежутка $-2 \leqslant x < 2$ являются решениями исходного уравнения.

в) $x \geqslant 2$.

Соответствующее уравнение

$$x - 2 + 2x + 4 = x + 6\,.$$

Его решение $x = 2$ удовлетворяет условию $x \geqslant 2$.

Объединяя решения пунктов б) и в), получаем

Ответ: $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

6. Иррациональные уравнения.

6.1. «Уединение» радикала.

Задача 8. *Решить уравнение*

$$6 + 4\sqrt{3 - x} = 5x\,.$$

Решение: ОДЗ определена условием $3 - x \geqslant 0$, т.е. $x \leqslant 3$. Для того, чтобы избавиться от корня, необходимо возвести обе части уравнения в квадрат, а до этого «уединить» корень — перенести остальные члены (в данном случае 6) в другую часть уравнения, т.е. записать его в виде

$$4\sqrt{3 - x} = 5x - 6.$$

Теперь рассмотрим два случая:

а) $x < \frac{6}{5}$.

В этом случае в левой части уравнения стоит неотрицательное число, а справа — отрицательное. Поэтому при таких x решений нет.

б) $x \geqslant \frac{6}{5}$.

Здесь обе части уравнения неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат и приведения подобных членов получаем равносильное уравнение

$$25x^2 - 44x - 12 = 0.$$

Корни этого уравнения равны $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{6}{25}$; оба входят в ОДЗ. Но если первый корень удовлетворяет ограничению б), то второй таким свойством не обладает, т.е. этот корень — посторонний.

Ответ: $x = 2$.

6.2. Замена переменной.

Иногда решение задачи удаётся получить при помощи подходящей замены переменной.

Задача 9. *Решить уравнение*

$$\sqrt{2x^2+4x-7}+3=3\sqrt{x^2+2x-4}\ .$$

Решение: Сделаем замену переменной: $t=\sqrt{x^2+2x-4}$. Тогда наше уравнение можно переписать в виде:

$$\sqrt{2t^2+1}=3t-3.$$

Опять рассматриваем два случая:

а) $t<1$.
В этом случае в левой части уравнения стоит неотрицательное число, а справа — отрицательное. Поэтому при таких t решений нет.

б) $t \geqslant 1$.
Теперь можем возвести в квадрат обе части уравнения, не нарушив равносильности. При этом получим уравнение:

$$7t^2-18t+8=0.$$

Корни этого уравнения равны $t_1=2$, $t_2=\frac{4}{7}$. Если первый корень удовлетворяет ограничению б), то второй является посторонним. Для x, после возведения в квадрат и приведения подобных членов, получаем уравнение $x^2+2x-8=0$, решая которое, находим корни $x_1=-4$, $x_2=2$.

Ответ: $x_1=-4$, $x_2=2$.

6.3. Разложение левой части на множители.

Задача 10. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2-5x+6}-3\sqrt{x-3}-5\sqrt{x-2}+15=0.$$

Решение: ОДЗ определена условиями $x-3\geqslant 0, x-2\geqslant 0$ и $x^2-5x+6\geqslant 0$, что в итоге даёт $x-3\geqslant 0$. Разлагая на множители квадратный трёхчлен и группируя первый член со вторым, а третий — с четвёртым, получим уравнение

$$\sqrt{x-3}\cdot(\sqrt{x-2}-3)-5(\sqrt{x-2}-3)=0,$$

что даёт

$$(\sqrt{x-2}-3)\cdot(\sqrt{x-3}-5)=0.$$

Приравнивая каждый сомножитель нулю, находим, что $\sqrt{x-2}=3$ или $\sqrt{x-3}=5$. Решая полученные уравнения, находим

Ответ: $x_1=11, x_2=28.$

6.4. Иррациональные уравнения, содержащие корни высших степеней.

Задача 11. *Решить уравнение*

$$(12-x)^{\frac{1}{3}}+(14+x)^{\frac{1}{3}}=2.$$

Решение: Воспользуемся формулой:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

и возведём обе части уравнения в куб:

$$12-x+14+x+3\cdot(12-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(14+x)^{\frac{1}{3}}\cdot((12-x)^{\frac{1}{3}}+(14+x)^{\frac{1}{3}})=8.$$

Используя исходное уравнение и приводя подобные члены, получим:

$$(-x^2-2x+168)^{\frac{1}{3}}=-3.$$

Возводя ещё раз обе части уравнения в куб и решая полученное квадратное уравнсние, находим корни $x_1=-15, x_2=13.$

Ответ: $x_1=-15, x_2=13.$

7. Системы алгебраических уравнений.

Методы решения систем алгебраических уравнений достаточно похожи на методы решения отдельных уравнений. Можно выделить три основных метода, используемых при решении систем: подстановка значения одного из неизвестных, выраженного через другое (или через другие, если неизвестных больше, чем два), из одного из уравнений системы в другое (другие) уравнение; совместное преобразование уравнений системы, включая сложение или вычитание (реже — деление) уравнений, и метод замены переменных, когда вводятся новые неизвестные, для которых система записывается в более простом виде.

Задача 12. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}$$

Решение: Заметим, что второе уравнение выражено через сумму и произведение неизвестных, а в первом это легко сделать, если использовать формулу $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$. Поэтому введём новые неизвестные

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$$

Система запишется в виде

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 17 \\ u + v = 9 \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения v через u: $v = 9 - u$, и подставляя это значение в первое уравнение, получаем уравнение

$$u^2 + 2u - 35 = 0.$$

Его корни $u_1 = 5$ и $u_2 = -7$.
Соответственно $v_1 = 4$ и $v_2 = 16$. Это даёт две системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 16 \end{cases}$$

Для решения каждой из этих систем выразим y из первого уравнения и подставим во второе. Для первой системы получим уравнение

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

имеющее корни $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ и, соответственно, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$, для второй — уравнение

$$x^2 + 7x + 16 = 0,$$

не имеющее корней.

Ответ: $(4, 1)$ и $(1, 4)$.

Задача 13. *Решить систему уравнений*:

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 18 \\ xy + 4y^2 = 7 \end{cases}$$

Решение: Разделим первое уравнение на второе, получив уравнение

$$\frac{x^2 + 3xy}{xy + 4y^2} = \frac{18}{7}$$

или, после приведения к общему знаменателю, $7x^2 + 3xy - 72y^2 = 0$. Заметим, что если бы y равнялось нулю, то уравнение приобрело бы вид $x^2 = 0$. Но пара нулей, очевидно, не удовлетворяет ни одному из уравнений исходной системы. Следовательно, $y \neq 0$ и можно разделить обе части уравнения на y. Введя после этого обозначение $z = \frac{x}{y}$, получим для z квадратное уравнение:

$$7z^2 + 3z - 72 = 0.$$

Его корни $z_1 = 3$, $z_2 = -\frac{24}{7}$. Следовательно, $x = 3y$ или $x = -\frac{24}{7}y$. Подставляя эти значения в первое уравнение, получим в первом случае уравнение $18y^2 = 18$, откуда следует, что $y = \pm 1$ и, соответственно, $x = \pm 3$, а во втором — уравнение $\frac{72}{49}y^2 = 18$, из которого находим $y = \pm \frac{7}{2}$ и, соответственно, $x = \pm 12$.

Ответ: $(3, 1), (-3, -1), (-12, \frac{7}{2}), (12, -\frac{7}{2})$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0.$$

2. Решить уравнение

$$3x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 10x + 12 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$x^2(x+1)^2 - x(x^2-1) = 2(x-1)^2.$$

4. Решить уравнение

$$|4x^2 + 4x - 3| = -3x + 2\,.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} = 2x - 4\,.$$

6. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 5x + 3} + \sqrt{x^2 - 5x + 10} = 7\,.$$

7. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 21x - 11} - \sqrt{2x^2 - 9x + 4} = \sqrt{18x - 9}\,.$$

8. Решить уравнение

$$(8+x)^{\frac{1}{3}} + (8-x)^{\frac{1}{3}} = 1.$$

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy \cdot (x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

Занятие № 3

Решение алгебраических неравенств

Методы решения алгебраических неравенств во многом повторяют методы решения уравнений с добавлением лишь одной, но совершенно принципиальной идеи: функция, непрерывная и не обращающаяся в ноль на некотором интервале, сохраняет на нём знак. Это является основой применения метода интервалов.

Для решения неравенства $f(x) \geqslant 0$ необходимо найти точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, в которых функция $f(x)$ обращается в ноль или имеет разрыв (в частности — не определена), и определить знак $f(x)$ в каждом из интервалов $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), … ,(x_{n-1}, x_n), $(x_n, +\infty)$. Решением неравенства является объединение тех интервалов, в которых $f(x) > 0$, с включением точек, в которых функция равна 0, если неравенство нестрогое.

Чтобы иметь возможность применить этот метод, необходимо прежде всего преобразовать заданное неравенство к виду $f(x) > 0$. При этом нельзя забывать о том, что умножение обеих частей неравенства на одинаковую величину приводит к изменению знака неравенства, если эта величина отрицательная, поэтому, чтобы избежать рассмотрения большего количества отдельных случаев, надо принять за правило, что умножать обе части неравенства можно лишь на величину, имеющую фиксированный знак. Практически это означает, что при решении неравенств (в отличие от решения уравнений) нельзя избавиться от знаменателей умножением обеих частей неравенства на величину, которая в зависимости от значения неизвестной может иметь разный знак.

После преобразования неравенства к виду $f(x) > 0$ (или $f(x) \geqslant 0$) необходимо найти корни функции $f(x)$ (т.е. решить уравнение $f(x) = 0$) и точки, в которых $f(x)$ имеет разрыв (практически это означает — точки, в которых знаменатель $f(x)$ обращается в ноль), нанести эти точки $x_1, \ldots, x_n$ на числовую ось и найти знак функции в каждом из полученных интервалов, выбрав для ответа объединение тех промежутков, в которых $f(x)$ положительна. Разумеется решение неравенств $f(x) < 0$ и $f(x) \leqslant 0$ идёт по той же схеме.

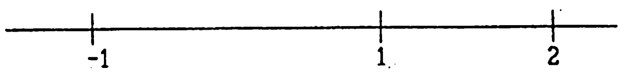
Задача 1. *Решить неравенство*

$$\frac{x^2 - 8x + 3}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 2.$$

Решение : Перенося 2 в левую часть неравенства и приводя к общему знаменателю (внимание: умножение обеих частей уравнения на $x^2 + 3x + 2$ недопустимо), получаем неравенство

$$\frac{-x^2 - 2x - 1}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0.$$

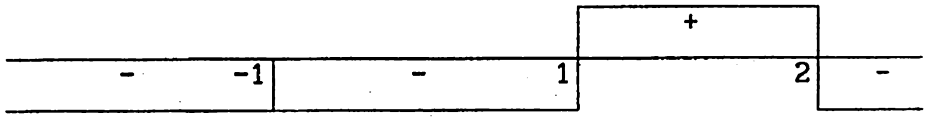
Числитель имеет единственный корень $x_1 = -1$, корни знаменателя $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Для определения результата удобнее всего нанести полученные точки на числовую ось, которая разбивается при этом на четыре промежутка:



и определить знак функции $f(x) = \dfrac{-x^2 - 2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$ в каждом из этих промежутков. Это можно сделать непосредственной подстановкой значений из соответствующих промежутков (например, значений x, равных -2, 0, $\frac{1}{3}$, 3), но удобнее разложить на множители числитель и знаменатель, т.е. записать неравенство в виде

$$\frac{-(x+1)^2}{(x-1)\cdot(x-2)} \geqslant 0$$

и обратить внимание на то, что при очень больших значениях x константы $1, -1, 2$ малы по сравнению с x. Поэтому при больших значениях x (а следовательно — на всем интервале $(2, +\infty)$) левая часть неравенства отрицательна. При переходе через $x = 2$ скобки $(x + 1)^2$ и $(x - 1)$ сохраняют знак, а скобка $(x - 2)$ меняет знак, поэтому изменится знак у всей дроби, следовательно, на интервале $(1, 2)$ левая часть неравенства положительна. Аналогично, при переходе через $x = 1$ меняет знак скобка $(x - 1)$, т.е. на интервале $(-1, 1)$ левая часть вновь отрицательна. Наконец, при переходе через $x = -1$ скобки $(x - 1)$ и $(x - 2)$ сохраняют знак, а скобка $(x + 1)^2$ обращается в ноль, но знак сохраняет (т.к. квадрат числа всегда неотрицателен), поэтому перемены знака при $x = -1$ не произойдёт, и на промежутке $(-\infty, -1)$ левая часть неравенства также отрицательна. Результат этого анализа удобно вновь отобразить на числовой оси



В завершение отметим, что точки, в которых числитель обращается в ноль, являются решением неравенства, поскольку оно нестрогое ($\geqslant 0$, а не > 0) , а точки, в которых в ноль обращается знаменатель, — нет (при этом неравенство вообще не определено). Это даёт окончательный результат

Ответ: $x = -1$ или $1 < x < 2$.

Особенно эффективно работает метод интервалов при решении систем неравенств. Его применение в этом случае разбивается на два этапа:

а) решается каждое неравенство в отдельности;

б) решения всех неравенств изображаются на одной числовой оси и выбирается множество точек, удовлетворяющих всем неравенствам системы (графически это означает, что берутся точки, расположенные под всеми "крышами").

Особенно просто и наглядно этот метод выглядит при решении неравенств, содержащих модули.

Задача 2. *Решить неравенство*

$$x \cdot |x - 4| \geqslant 3x - 6.$$

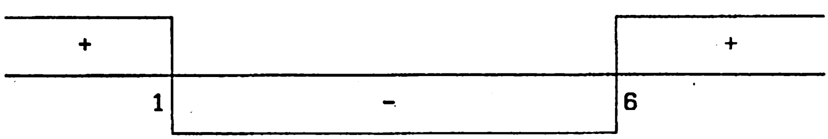
Решение: По определению модуля

$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, & \text{если } x \geqslant 4 \\ 4 - x, & \text{если } x < 4 \end{cases}$$

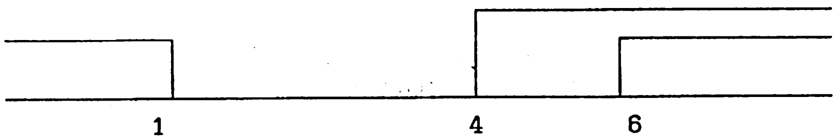
Это означает, что неравенство разбивается на две системы неравенств, каждая из которых включает условие, при котором раскрывается модуль, и исходное неравенство, записанное при выполнении этого условия, т.е. следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 4 \\ x(x - 4) \geqslant 3x - 6 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x(4 - x) \geqslant 3x - 6 \end{cases}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов второе неравенство первой системы запишется в виде $x^2 - 7x + 6 \geqslant 0$. Корни соответствующего уравнения равны $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. Решая по методу интервалов, получим

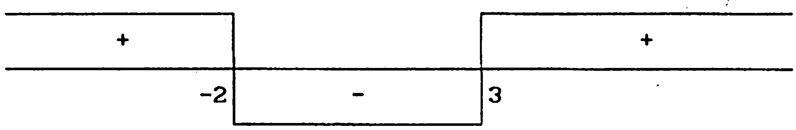


Изобразим теперь решение этого неравенства на одном чертеже с решением неравенства $x \geqslant 4$:

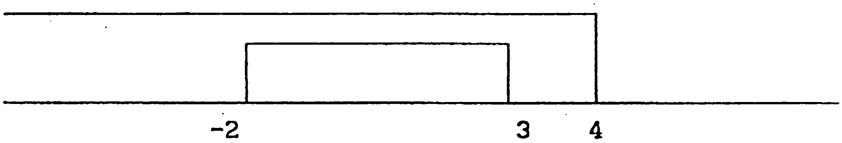


Видно, что двум неравенствам одновременно удовлетворяют лишь точки промежутка $[6, +\infty)$, который и является решением первой системы.

Аналогично второе неравенство второй системы можно записать в виде $x^2 - x - 6 \leqslant 0$. Корни соответствующего уравнения $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, что даёт решение по методу интервалов



Изобразим получчнное решение вместе с решением неравенства $x < 4$:



В этом случае решением являются все точки отрезка $[-2, 3]$. Окончательный ответ получаем, объединяя решения двух систем.

Ответ: $x \in [-2, 3] \cup [6, +\infty)$.

Задача 3. *Решить неравенство*

$$|x^2 - 6x + 5| \leqslant 3.$$

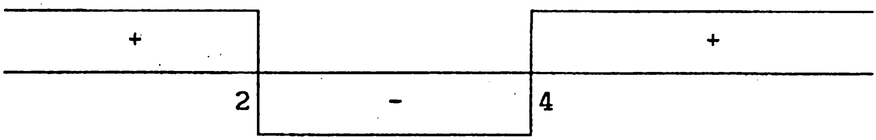
Решение: В этом случае можно поступить аналогично решению предыдущей задачи, расписав определение модуля и получив две системы квадратичных неравенств. Однако решение получится в два раза короче, если воспользоваться тем, что из определения модуля немедленно следует, что неравенство $|x| \leqslant a$ эквивалентно двойному неравенству $-a \leqslant x \leqslant a$, т.е. системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant -a \\ x \leqslant a \end{cases}$$

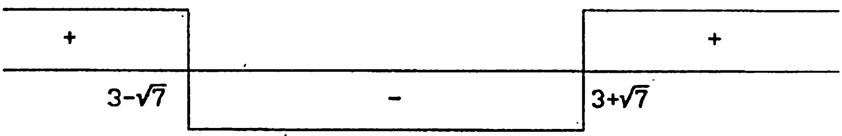
Применяя эту идею, получаем, что заданное неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geqslant -3 \\ x^2 - 6x + 5 \leqslant 3 \end{cases}$$

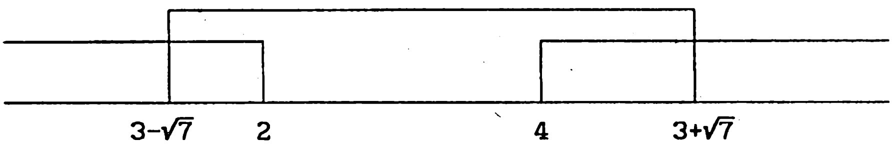
Первое из них сводится к неравенству $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$, корни соответствующего уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, решение находим по методу интервалов



Аналогично второе неравенство сводится к неравенству $x^2 - 6x + 2 \leqslant 0$, корни соответствующего уравнения $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{7}$, а решение неравенства



Изобразим решения двух неравенств на одной оси:



Получаем, что решение системы является объединением двух отрезков.

Ответ: $x \in [3 - \sqrt{7}, 2] \cup [4, 3 + \sqrt{7}]$.

Особого внимания и аккуратности требует решение иррациональных неравенств, поскольку в этом случае не только играет важную роль понятие ОДЗ, но и не обойтись без операции возведения в квадрат, которая является равносильным преобразованием в случае, когда обе части неравенства неотрицательны, меняет знак неравенства, если обе части отрицательны и вообще недопустима, если две части неравенства имеют разный знак. Причём проверка подстановкой, как в случае соответствующих уравнений, здесь недопустима, т.к. её нельзя произвести для бесконечного множества точек. Чтобы не запутаться в возможных случаях, следует взять за правило, что возводить в квадрат две части неравенства следует лишь тогда, когда обе они неотрицательны, а условия, при которых это верно, добавляются к набору неравенств системы.

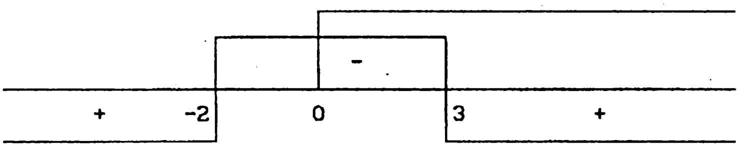
Задача 4. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x + 6} \geqslant x.$$

Решение: Область допустимых значений определена неравенством $x \geqslant -6$. Для решения необходимо возведение в квадрат обеих частей неравенства, однако делать это без дополнительного анализа было бы ошибкой, поскольку возведение в квадрат обеих частей неравенства является равносильной операцией только в случае, если обе части неравенства неотрицательны. В данной задаче это имеет место при $x \geqslant 0$. При этом очевидно, что при $-6 \leqslant x < 0$ неравенство выполнено (в левой части стоит неотрицательное число, а в правой — отрицательное). Считая, что $x \geqslant 0$, возводим в квадрат и получаем неравенство

$$x^2 - x - 6 \leqslant 0 .$$

Корни соответствующего уравнения $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Решение по методу интервалов (с учётом неравенства $x \geqslant 0$) даёт



т.е. $0 \leqslant x \leqslant 3$. Объединяя с неравенством $-6 \leqslant x \leqslant 0$, получаем окончательный результат.

Ответ: $-6 \leqslant x \leqslant 3$.

Задача 5. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x+2} > \sqrt{x-2} + \sqrt{x-4} .$$

Решение: Область допустимых значений определена неравенствами $x \geqslant -2$, $x \geqslant 2$ и $x \geqslant 4$, что можно сразу свести к одному неравенству $x \geqslant 4$. В ОДЗ обе части неравенства положительны, так что возведение в квадрат является равносильным преобразованием и приводит к неравенству

$$x + 2 > x - 2 + 2\sqrt{x^2 - 6x + 8} + x - 4 ,$$

или, после приведения подобных членов и уединения корня, — к неравенству

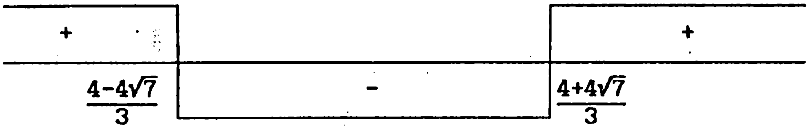
$$8 - x > 2\sqrt{x^2 - 6x + 8} .$$

В этом неравенстве левая часть положительна лишь при $x < 8$ и в этом случае возведение в квадрат допустимо. В случае же $x > 8$ в левой части неравенства стоит отрицательное выражение, а в правой — положительное, т.е. неравенство заведомо неверно. Поэтому добавляем неравенство $x < 8$ и вновь возводим в квадрат. После приведения подобных членов получаем неравенство

Занятие № 3

$$3x^2 - 8x - 32 < 0.$$

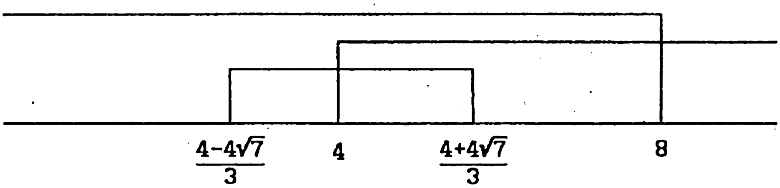
Корни соответствующего уравнения равны $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 4\sqrt{7}}{3}$, а решение неравенства находим по методу интервалов:



Итак, получаем, что исходное неравенство эквивалентно системе из трёх неравенств: $x \geqslant 4$ (ОДЗ), $x < 8$ (условие возведения в квадрат) и

$$\frac{4 - 4\sqrt{7}}{3} < x < \frac{4 + 4\sqrt{7}}{3}.$$

Чтобы найти решение этой системы неравенств, необходимо правильно расположить на числовой оси иррациональные числа $\dfrac{4 \pm 4\sqrt{7}}{3}$. Их, разумеется, можно вычислить с помощью калькулятора, но достаточно ограничиться следующими соображениями: очевидно, что $\dfrac{4 - 4\sqrt{7}}{3} < 0$, а если учесть, что $2 < \sqrt{7} < 3$, то получим, что $8 < 4\sqrt{7} < 12$, $12 < 4 + 4\sqrt{7} < 16$ и $4 < \dfrac{4 + 4\sqrt{7}}{3} < \dfrac{16}{3} < 8$, т.е. число $\dfrac{4 + 4\sqrt{7}}{3}$ расположено между числами 4 и 8. Окончательно это даёт следующий чертёж.



Окончательный ответ получаем исходя из того, то должны быть выполнены все три неравенства, причём $x \geqslant 4$ — нестрогое.

Ответ: $\left[4, \dfrac{4 + 4\sqrt{7}}{3}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство

$$x^2 + 2x - 4 \leqslant x + 2.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 3} \leqslant 1.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-4} < -2.$$

4. Решить неравенство

$$|x^2 + 4x - 1| < 4.$$

5. Решить неравенство

$$|x^2 - 4x + 3| > x - 1.$$

6. Решить неравенство

$$\sqrt{4x + 21} > 2x + 3.$$

7. Решить неравенство

$$\sqrt{x + 2 - x^2} < 3 - x\,.$$

Занятие № 4

Логарифмические и показательные уравнения

Напомним, что число x называется логарифмом числа b по основанию a, если $a^x = b$ (Алгебра и начала анализа, гл.IV, 10).

Таким образом, по определению $a^{\log_a b} = b$.

Поскольку операция возведения в степень определена, вообще говоря, только при положительном основании степени (отрицательные числа нельзя возводить в нецелые степени), логарифмы определены только при положительном основании. Кроме того, из того, что любая степень единицы равна единице, следует, что основание логарифма должно быть отличным от 1. Любая степень положительного числа есть положительное число, поэтому логарифмы определены только для положительных чисел. Следовательно, функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$ и $a > 0$, $a \neq 1$. Это обстоятельство необходимо учитывать при решении уравнений, содержащих логарифмы, и начинать с определения области допустимых значений, учитывая, что все выражения, от которых берутся логарифмы, должны быть положительны.

Отметим, что из определения логарифма немедленно следует, что $\log_a a = 1$ для любого a, при котором определён логарифм.

Основные формулы:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m,$$

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m},$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m},$$

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b,$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b,$$

$$\log_c a^n = n \cdot \log_c a,$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b},$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

$$\log_{c^n} a = \frac{1}{n}\log_c a.$$

Уравнения, содержащие неизвестную величину в показателе степени, называются показательными. Уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $b > 0$, — простейшее показательное уравнение. Оно имеет единственный корень $x = \log_a b$. Большинство показательных уравнений в конечном итоге сводится к простейшим.

Основные типы показательных уравнений и приёмы для их решений

1. Приведение к одному основанию.

Примеры:

$$2^x = 64,$$

$$3^x = 9^{x-2}.$$

Первое уравнение приводится к виду $2^x = 2^6$ и $x = 6$, а второе — к виду $3^x = 3^{2x-4}$ и $x = 2x - 4$, откуда $x = 4$.

2. Логарифмирование.

Примеры:

$$5^x = 10,$$

$$7^x = 3^{2x} \cdot 2.$$

Для первого уравнения непосредственно получаем $x = \log_5 10$, а для второго, прологарифмировав по основанию 10 (можно по любому основанию), получим последовательность уравнений $\lg 7^x = \lg (3^{2x}\cdot 2)$, $x\cdot\lg 7 = \lg 3^{2x} + \lg 2 = 2x\cdot\lg 3 + \lg 2$.

Последнее уравнение линейно относительно x и т.к. $\lg 7 - 2\lg 3 = \lg 7 - \lg 9 = \lg\frac{7}{9}$, то $x = \dfrac{\lg 2}{\lg\frac{7}{9}}$.

3. Уравнения, содержащие степени с двумя различными (не сводящимися друг к другу) основаниями.

Примеры:

$$7\cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3},$$

$$5^{2x} - 7^x = 17\cdot 5^{2x} - 17\cdot 7^x .$$

В этих случаях необходимо собрать в разных частях уравнений степени с общими основаниями и вынести степени за скобки. Получим уравнения 2 типа (возможно 1 типа). Для первого из данных уравнений будем иметь:

$$5^{x+3} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 7\cdot 3^{x+1},$$

$$5^x\cdot(5^3 - 5^2) = 3^x\cdot(3^4 - 7\cdot 3),\ \ 100\cdot 5^x = 60\cdot 3^x,\ \ 5\cdot 5^x = 3\cdot 3^x .$$

Следовательно, имеем $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$ и $x = -1$.

Для второго уравнения получаем

$$17\cdot 7^x - 7^x = 17\cdot 5^{2x} - 5^{2x},\ 16\cdot 7^x = 16\cdot 5^{2x},\ 7^x = 25^x.$$

Последнее равенство возможно только при $x = 0$.

4. Уравнение

$$c_0 a^{nx} + c_1 a^{(n-1)\cdot x} + \ldots + c_{n-1} a^x + c_n = 0$$

сводится к алгебраическому заменой $a^x = y$.

Примеры:

$$4^x - 2\cdot 2^x - 8 = 0,$$

$$5\cdot 3^{2x+1} - 7\cdot 3^{x-1} = 11.$$

Для первого уравнения $4^x = 2^{2x}$ и его можно решить заменой $y = 2^x$. Второе уравнение, если записать его в виде $15 \cdot 3^{2x} - \frac{7}{3} \cdot 3^x - 11$, решается заменой $y = 3^x$.

Задача 1. Решить уравнение

$$4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0.$$

Решение: Используем то, что

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 \text{ и } 2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \cdot 2.$$

Обозначим $2^x = y$. Тогда

$$y^2 - 5y - 24 = 0.$$

Корни этого уравнения $y_1 = 8$, $y_2 = -3$. Получаем два уравнения:

$$2^x = 8 \quad \text{или} \quad 2^x = -3.$$

Первое уравнение имеет решение $x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, второе — решений не имеет.

Ответ: $x = 3$.

5. Уравнения, однородные относительно a^x и b^x:

$$c_0 a^{nx} + c_1 a^{(n-1) \cdot x} b^x + \ldots + c_{n-1} a^x b^{(n-1) \cdot x} + c_n b^{nx} = 0.$$

Разделив обе части уравнения на b^{nx} и обозначив $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y$, получим алгебраическое уравнение n-ого порядка.

Остановимся на случае $n = 2$. Однородное уравнение вида

$$c_1 a^{2x} + c_2 a^x b^x + c_3 b^{2x} = 0,$$

заменой $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y$ сводится к квадратному уравнению $c_1 y^2 + c_2 y + c_3 = 0$.

Примеры:

$$2 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{2x} = 0,$$

$$3\cdot 4^x + 13\cdot 14^x + 4\cdot 49^x = 0,$$

$$4^{\frac{1}{x}} - 2\cdot 6^{\frac{1}{x}} - 3\cdot 9^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Для второго уравнения $4^x = 2^{2x}$, $14^x = 2^x\cdot 7^x$, $49^x = 7^{2x}$. Третье уравнение можно записать в виде $2^{\frac{2}{x}} - 2\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot 3^{\frac{1}{x}} - 3\cdot 3^{\frac{2}{x}} = 0$. Разделив обе части этого равенства на $3^{\frac{2}{x}}$ и обозначив $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = y > 0$, получим квадратное уравнение $y^2 - 2y - 3 = 0$.

Задача 2. *Решить уравнение*

$$9^x + 6^x = 3\cdot 2^{2x+1}.$$

Решение: Воспользуемся тем, что

$$9^x = (3^2)^x = (3^x)^2,\ 6^x = 2^x\cdot 3^x \quad \text{и} \quad 2^{2x+1} = (2^x)^2\cdot 2,$$

и разделим обе части уравнения на 2^{2x}. Получим уравнение

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 6.$$

Обозначим $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Получаем уравнение $y^2 + y - 6 = 0$. Его корни $y_1 = -3$ и $y_2 = 2$. Это даёт два уравнения:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = -3 \quad \text{или} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2.$$

Первое из них не имеет решения, второе даёт $x = \log_{\frac{3}{2}} 2$. Это выражение формально верно, но выглядит несколько громоздко. Можно (но не необходимо) перейти к более естественному основанию логарифма. Возможны варианты ответа:

$$x = \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{3}{2}} = \frac{1}{\log_2 3 - 1} \quad \text{(самый элегантный)}$$

или

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{3}{2}} = \frac{\lg 2}{\lg 3 - \lg 2} \quad \text{(самый удобный для вычисления с помощью калькулятора).}$$

Ответ: $x = \dfrac{\lg 2}{\lg 3 - \lg 2}$.

6. Уравнения, содержащие степени, произведение которых равно единице.

Примеры:

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x + 2\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)^x = 3,$$

$$2\cdot\left(5+\sqrt{24}\right)^x - 3\cdot\left(5-\sqrt{24}\right)^x = 1.$$

Здесь надо заметить, что $\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot\left(4-\sqrt{15}\right) = 1$ и $\left(5+\sqrt{24}\right)\cdot\left(5-\sqrt{24}\right) = 1$. Следовательно, если одну степень каждого уравнения обозначить через y, то другая степень будет равна $\dfrac{1}{y}$.

Задача 3. *Решить уравнение*

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Решение: Так как

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 1,$$

то положим $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} = y > 0$. Тогда $\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{y} > 0$. Наше уравнение примет вид $y + \dfrac{1}{y} = 4$ или $y^2 - 4y + 1 = 0$. Решая это квадратное уравнение, получим $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Оба корня положительны. Тогда $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 2+\sqrt{3}$ и $x_1 = 1$. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 2-\sqrt{3} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ и $x_2 = -1$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1$.

Отметим наиболее часто встречающиеся преобразования при решении логарифмических (содержащих неизвестные величины под знаком логарифма) уравнений. Конечно, во всех случаях применяются свойства логарифмов.

Занятие № 4

1. Потенцирование, т.е. переход от уравнения $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{f(x)} \psi(x)$ к уравнению $\varphi(x) = \psi(x)$.

Здесь следует иметь ввиду, что эти уравнения, возможно, не равносильны. Второе уравнение может иметь корни, не входящие в ОДЗ первого, для которых $f(x) \leqslant 0$, $f(x) = 1$ или $\varphi(x) = \psi(x) \leqslant 0$.

Примеры:

$$\log_{2x}(0{,}5 + x) = \log_{2x} 2 - \log_{2x} x,$$

$$0{,}5 \cdot \lg(2x - 1) = 1 - \lg\sqrt{x - 9}\,,$$

$$\log_x\sqrt{5} + \log_x(5x) = 1 - \log_x\sqrt{5}\,.$$

Задача 4. *Решить уравнение*

$$\lg 5 + \lg(x + 10) = 1 - \lg(2x - 1) + \lg(21x - 20).$$

Решение: Область допустимых значений определена условиями

$$x + 10 > 0,\ 2x - 1 > 0 \text{ и } 21x - 20 > 0,$$

т.е. условиями

$$x > -10,\ x > \frac{1}{2} \text{ и } x > \frac{20}{21}.$$

Это даёт область допустимых значений в виде $x > \frac{20}{21}$.

Заменим 1 на lg 10 и используем формулы суммы и разности логарифмов. Получим уравнение

$$\lg(5 \cdot (x + 10)) = \lg\frac{10 \cdot (21x - 20)}{(2x - 1)}.$$

Потенцирование и сокращение на 5 приводит к уравнению

$$x + 10 = \frac{2 \cdot (21x - 20)}{(2x - 1)}.$$

После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов получаем уравнение

$$2x^2 - 23x + 30 = 0,$$

корнями которого являются числа $x_1 = 10$ и $x_2 = \frac{3}{2}$, оба входящие в область допустимых значений.

Ответ: $x_1 = 10,\ x_2 = \frac{3}{2}$.

2. Применение основного логарифического тождества, т.е. переход от уравнения $f(x)^{\log_{f(x)} \varphi(x)} = \psi(x)$ к уравнению $\varphi(x) = \psi(x)$. Здесь также могут появиться посторонние корни.

Примеры:

$$x^{\log_x \log_2 x^2} = \log_2(6 - x),$$

$$2^{\log_2 7^x} = 3^{\log_3(6 + 7^{x-1})}.$$

Задача 5. *Решить уравнение*

$$5^{\log_5 x} \cdot \lg 4 = \lg(2 \cdot 9^x - 6^x).$$

Решение: Применив основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ и формулу $n\log_c a = \log_c a^n$, получим

$$\lg 4^x = \lg(2 \cdot 9^x - 6^x).$$

Потенцирование этого уравнения приводит к однородному показательному уравнению

$$4^x = 2 \cdot 9^x - 6^x.$$

Разделим обе части уравнения на 9^x и обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y > 0$. Полученное при этом квадратное уравнение $y^2 + y - 2 = 0$ имеет корни $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Второй корень — посторонний, поэтому $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, $x = 0$ — решение однородного показательного уравнения. Так как $x = 0$ не входит в ОДЗ исходного уравнения, то задача не имеет решений.

3. Переход к новому основанию.

Примеры:

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7,$$

$$\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1.$$

В первом уравнении удобно перейти к основанию 2, а во втором — к основанию 3, применив формулы $\log_{c^n} a = \frac{1}{n}\cdot\log_c a$ и $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Задача 6. *Решить уравнение*

$$\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$$

Решение: Область допустимых значений определяется исходя из того, что основание логарифма должно быть положительным и отличным от единицы. Это даёт набор условий:

$$2x > 0, 2x \neq 1, x^2 \neq 1.$$

Из этих условий получаем, что $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$.
Поскольку $16 = 2^4$, а $64 = 2^6$, удобно перейти к логарифмам по основанию 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3.$$

Из формул логарифма произведения и степени получаем:

$$\frac{4}{2\cdot\log_2 x} + \frac{6}{1 + \log_2 x} = 3.$$

Обозначим $y = \log_2 x$. Получаем уравнение

$$\frac{2}{y} + \frac{6}{y+1} = 3.$$

После очевидных преобразований получаем уравнение

$$3y^2 - 5y - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения равны $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{3}$. Это даёт два уравнения для нахождения x:

$$\log_2 x = 2 \qquad \text{или} \qquad \log_2 x = -\frac{1}{3}.$$

Потенцируя, получаем корни $x_1 = 4$, $x_2 = 2^{-\frac{1}{3}}$, входящие в ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 2^{-\frac{1}{3}}$.

4. Логарифмирование.

Примеры:

$$x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1},$$

$$x^{\log_2 x - 1} = 64.$$

Задача 7. *Решить уравнение*

$$x^{\lg^3 x - 5\cdot\lg x} = 0{,}0001.$$

Решение: Область допустимых значений определена условием $x > 0$. Учитывая, что $\lg 0{,}0001 = \lg 10^{-4} = -4\cdot\lg 10 = -4$, получаем

$$\lg x^{\lg^3 x - 5\cdot\lg x} = (\lg^3 x - 5\cdot\lg x)\cdot\lg x = \lg^4 x - 5\cdot\lg^2 x = -4.$$

Обозначим $y = \lg^2 x$. Получаем уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$.
Корни этого уравнения $y_1 = 4$, $y_2 = 1$. Это даёт два уравнения для x:

$$\lg^2 x = 4 \quad \text{и} \quad \lg^2 x = 1.$$

Следовательно,

$$\lg x = \pm 2 \quad \text{или} \quad \lg x = \pm 1.$$

Потенцируя, получаем четыре значения x: $x_1 = 10^2$, $x_2 = 10^{-2}$, $x_3 = 10$, $x_4 = 10^{-1}$. Все эти корни входят в ОДЗ.

Ответ: $x_1 = 100, x_2 = 0{,}01$, $x_3 = 10, x_4 = 0{,}1$.

5. Замена переменной.

Примеры:

$$\log_3^2 x = 2\cdot\log_3 x - 3,$$

$$\log_5 x + \log_x 5 = 2{,}5,$$

$$\log_2^2 x - 2\cdot\log_2 x^2 + 3 = 0.$$

В первом уравнении надо положить $\log_3 x = y$, во втором — $\log_5 x = y$, при этом $\log_x 5 = \dfrac{1}{\log_5 x} = \dfrac{1}{y}$.

Метод замены применим также при решении логарифмически-показательных уравнений и некоторых других уравнений.

Задача 8. *Решить уравнение*

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cdot\log_2 3 - \log_2 (3^x - 13) = 2.$$

Решение: По формуле логарифма степени

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cdot\log_2 3 = \log_2 3^{1+\frac{x}{2}} = \log_2 (3\cdot 3^{\frac{x}{2}}).$$

Поскольку $3^x = 3^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2$, удобна замена $y = 3^{\frac{x}{2}}$. Это даёт уравнение

$$\log_2 3y - \log_2 (y^2 - 13) = 2 = \log_2 4.$$

Применяя в левой части формулу логарифма частного, получаем уравнение

$$\log_2 \frac{3y}{y^2 - 13} = \log_2 4.$$

После потенцирования находим

$$\frac{3y}{y^2 - 13} = 4.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем уравнение

$$4y^2 - 3y - 52 = 0,$$

имеющее корни $y_1 = -\dfrac{13}{4}$, $y_2 = 4$. Соответственно, для x имеем уравнения

$$3^{\frac{x}{2}} = -\frac{13}{4} \quad \text{или} \quad 3^{\frac{x}{2}} = 4.$$

Первое из них не имеет решений, из второго находим $\frac{x}{2} = \log_3 4$, т.е. $x = 2\cdot\log_3 4 = 4\cdot\log_3 2$.

Ответ: $x = 4\cdot\log_3 2$.

Задача 9. *Решить уравнение*

$$\log_3^2 x + \log_x^2 3 + 3\cdot\log_3 x + 3\cdot\log_x 3 = 2.$$

Решение: Приведём все логарифмы уравнения к основанию 3:

$$\log_3^2 x + \frac{1}{\log_3^2 x} + 3\cdot(\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x}) = 2.$$

Произведём замену $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = y$. Тогда $y^2 = \log_3^2 x + 2 + \frac{1}{\log_3^2 x}$ и уравнение примет вид $y^2 + 3y - 4 = 0$, корнями которого будут $y_1 = 1$ и $y_2 = -4$. Решим два уравнения:

$$\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 1 \quad \text{и} \quad \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = -4.$$

Обозначив $\log_3 x = t$ и умножив оба уравнения на t, получим два квадратных уравнения: $t^2 - t + 1 = 0$ и $t^2 + 4t + 1 = 0$. Первое уравнение корней не имеет, корни второго — $t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$. Следовательно, $\log_3 x = -2 \pm \sqrt{3}$ и $x_{1,2} = 3^{-2 \pm \sqrt{3}}$.

Ответ: $x_{1,2} = 3^{-2 \pm \sqrt{3}}$.

6. Разложение на множители.

Примеры:

$$2\cdot\log_3 x\cdot\log_2 x + 2\cdot\log_3 x - \log_2 x - 1 = 0,$$

$$3\cdot 5^x\cdot\log_2 x - 2\cdot 5^x + 3\cdot\log_2 x - 2 = 0.$$

Эти уравнения эквивалентны следующим:

$$(2\cdot\log_3 x - 1)\cdot(\log_2 x + 1) = 0,$$

$$(5^x + 1)\cdot(3\cdot\log_2 x - 2) = 0.$$

Занятие № 4

Методы решения систем логарифмических и показательных уравнений аналогичны методам решения соответствующих уравнений, поэтому ограничимся рассмотрением примеров.

Задача 10. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1+\lg 8 \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3 \end{cases}$$

Решение: Область допустимых значений определена условиями

$$x+y>0 \quad \text{и} \quad x-y>0.$$

Применив во втором уравнении формулу логарифма частного, получаем

$$\lg\frac{x+y}{x-y} = \lg 3.$$

Потенцируя, находим

$$\frac{x+y}{x-y} = 3,$$

или, после элементарных преобразований, $x=2y$. Подставляем это выражение вместо x в первое уравнение, преобразовав его правую часть к виду $1+\lg 8 = \lg 10 + \lg 8 = \lg 80$. Получаем

$$\lg(4y^2+y^2) = \lg 80,$$

или, после потенцирования, $5y^2 = 80$, откуда следует, что $y = \pm 4$. Соответственно, $x = \pm 8$. Легко видеть, что значения $x = -8$, $y = -4$ не входят в область допустимых значений (при этом $x+y<0$), а значения $x=8$, $y=4$ — входят.

Ответ: $x=8, y=4$.

Задача 11. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ x+2-\log_2(9^y+7) = 0 \end{cases}$$

Решение: Поскольку $9^y+7>0$ при всех y, область допустимых значений — множество всех пар (x, y). Используя то, что

$$x+2 = \log_2(2^{x+2}) = \log_2(4\cdot 2^x),$$

и потенцируя второе уравнение, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 4 \cdot 2^x = 9^y + 7 \end{cases}$$

Сделаем замену неизвестных $z = 2^x$, $t = 3^y$. Тогда, с учётом того, что $9^y = (3^y)^2 = t^2$, система запишется в виде

$$\begin{cases} z - t = 1 \\ 4 \cdot z = t^2 + 7 \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения $z = t + 1$ и подставляя это значение во второе уравнение, получаем для t уравнение

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

имеющее корни $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Это означает, что $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Соответственно, $z_1 = 2$, $z_2 = 4$, т.е. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ: (1, 0), (2, 1).

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение

$$5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3.$$

2. Решить уравнение

$$\lg(x + 5) - \lg(3x + 25) = \lg(x - 15) - \lg 17.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{3 \cdot \lg x + 19}{3 \cdot \lg x - 1} = 2 \cdot \lg x + 1.$$

4. Решить уравнение

$$x^{\lg x} = 100x.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2} \\ xy = 27 \end{cases}$$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13 \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = \lg 8 \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 2^y = 17 \\ x + \log_3(2^y - 5) = 3 \end{cases}$$

Занятие № 5

Логарифмические и показательные неравенства

Основой решения логарифмических и показательных неравенств являются те же методы, что и для соответствующих уравнений, и, по сути дела, на большинстве этапов решение уравнений и решение неравенств проводятся аналогично. К числу важных отличий можно отнести два момента.

Во-первых, принципиальное значение имеет свойство монотонности функций $\log_a x$ и a^x, а точнее то, что при $a > 0$ обе эти функции являются монотонно возрастающими, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывающими в своей области определения. Неверный учёт свойства монотонности (особенно в случае, когда $0 < a < 1$) часто приводит к ошибкам. Необходимо твёрдо помнить, что неравенство $\log_a x > \log_a y$ (или $a^x > a^y$) равносильно неравенству
$x > y$ только при $a > 1$, в случае же, если $0 < a < 1$, неравенство $\log_a x > \log_a y$ равносильно неравенству $0 < x < y$ (учитываем ОДЗ), а неравенство $a^x > a^y$ — неравенству $x < y$.

Во-вторых, понятие области допустимых значений при решении неравенств, содержащих логарифмы, требует более строгого и внимательного отношения, чем при решении уравнений, поскольку в этом случае решение практически всегда содержит бесконечное множество чисел (один или несколько интервалов) и поэтому невозможно проверить принадлежность их ОДЗ непосредственной подстановкой. В связи с этим рекомендуется всегда начинать решение неравенств с выписывания системы неравенств, включающей исходное и условия, определяющие ОДЗ.

Задача 1. *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+8) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}(x^2+4).$$

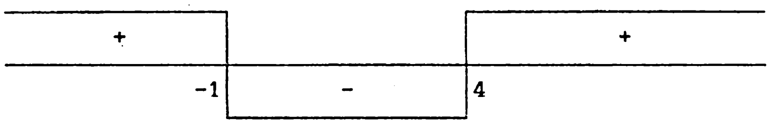
Решение: Область допустимых значений определена условиями

$$3x + 8 > 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 + 4 > 0,$$

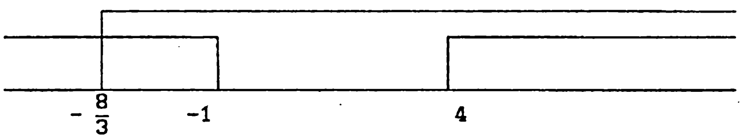
причём второе из них выполняется при всех значениях x. Потенцирование приводит к изменению знака неравенства, поскольку основание логарифма меньше единицы. Таким образом, неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x + 8 > 0 \\ 3x + 8 \leqslant x^2 + 4 \end{cases}$$

Первое из них даёт условие $x > -\dfrac{8}{3}$, а второе сводится к квадратному неравенству $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$. Корни соответствующего уравнения равны $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$, следовательно, по методу интервалов получаем решение соответствующего неравенства:



$x \leqslant -1$ или $x \geqslant 4$.



Объединяя с решением первого неравенства, получаем окончательный результат:

Ответ: $-\dfrac{8}{3} < x \leqslant -1$ или $x \geqslant 4$.

Задача 2. *Решить неравенство*

$$\log_2 \log_3 \frac{2x+1}{x-3} \leqslant 0.$$

Решение: Область допустимых значений определяется исходя из того, что оба логарифма должны вычисляться от положительных чисел. Это даёт два неравенства:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-3} > 0 \\ \log_3 \dfrac{2x+1}{x-3} > 0 \end{cases}$$

Поскольку $0 = \log_3 1$, с учётом того, что основание логарифма 3 больше единицы, второе из этих неравенств может быть записано в виде

$$\log_3 \frac{2x+1}{x-3} > \log_3 1$$

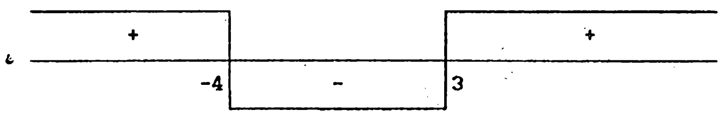
или после потенцирования — в виде

$$\frac{2x+1}{x-3} > 1.$$

Поскольку из этого неравенства следует первое из неравенств, определяющих область допустимых значений, оно и является единственным, определяющим ОДЗ. После приведения к общему знаменателю получаем неравенство

$$\frac{x+4}{x-3} > 0,$$

решение которого находим по методу интервалов:



Исходное неравенство можно записать в виде

$$\log_2 \log_3 \frac{2x+1}{x-3} \leqslant \log_2 1$$

или после потенцирования (с учётом того, что 2 > 1) — в виде

$$\log_3 \frac{2x+1}{x-3} \leqslant 1 = \log_3 3.$$

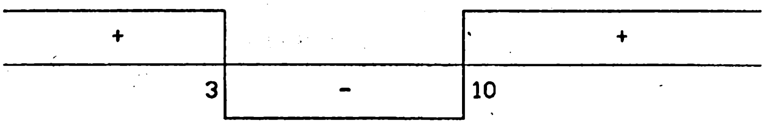
Ещё раз потенцируя, получаем, что

$$\frac{2x+1}{x-3} \leqslant 3$$

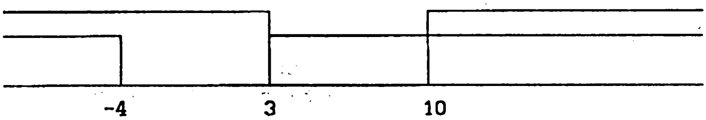
или после приведения к общему знаменателю

$$\frac{x-10}{x-3} \geqslant 0.$$

Решение находим по методу интервалов:



Объединяя с ОДЗ, получаем окончательный результат:



Ответ: $x < 4, \; x \geqslant 10.$

Задача 3. *Решить неравенство*

$$2^x - 5 \leqslant \frac{21}{2^x - 1}.$$

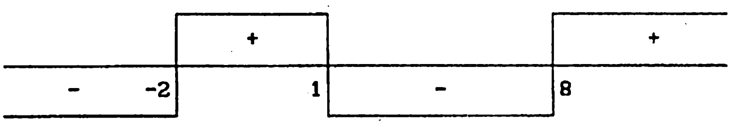
Решение: Область допустимых значений определена единственным условием $2^x - 1 \neq 0$, т.е. $x \neq 0$. Обозначим $y = 2^x$ (заметим, что при этом по свойствам показательной функции $y > 0$ при всех значениях x), тогда неравенство запишется в виде

$$y - 5 \leqslant \frac{21}{y - 1}.$$

Приведение к общему знаменателю даёт неравенство

$$\frac{y^2 - 6y - 16}{y - 1} \leqslant 0.$$

Решаем его по методу интервалов (корни числителя $y_1 = -2$, $y_2 = 8$):



Таким образом, $y \leqslant -2$ или $1 < y \leqslant 8$.

В силу условия $y > 0$ достаточно рассматривать только второе неравенство. Подставляя вместо y значение 2^x, получаем, что должно быть выполнено неравенство $1 < 2^x \leqslant 8$. После логарифмирования по основанию 2 оно даёт неравенство

$$\log_2 1 = 0 < \log_2 2^x = x \leqslant \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

Ответ: $0 < x \leqslant 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2 x - 3\cdot\lg x + 8}{\lg x + 1} < 2.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{9^x + 5\cdot 3^x - 4}{3\cdot 3^x - 1} > 1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_3(x+2) + \log_3(5x+6) < 0.$$

4. Решить неравенство

$$\log_2(9^x - 5\cdot 3^x + 6) < 1.$$

5. Решить неравенство

$$\log_2(x^2 - 9x + 20) < \log_2 3 + 1.$$

6. Решить неравенство

$$\log_2(4^x + 4) > x + \log_2(2^{x+1} - 3).$$

7. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{4x-1}{2x-2} \leqslant 0.$$

8. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_3(9x^2 + 15x + 7) > 0.$$

Занятие № 6

Прогрессии. Определения и основные формулы

Арифметическая прогрессия

Определение 1: *Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется арифметической прогрессией, если разность между двумя последовательными членами последовательности есть величина постоянная.*

Таким образом,

$$a_{n+1} - a_n = d$$

при всех $n = 1, 2, \ldots, k - 1$. Значение d называется разностью прогрессии.

Основные формулы:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1),$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

где S_n — сумма n членов прогрессии. Подставляя в формулу суммы выражение для a_n через a_1 и d, получаем формулу, в некоторых случаях более удобную для использованиия, но более сложную для запоминания:

$$S_n = \frac{2a_1 + d\cdot(n-1)}{2}\cdot n.$$

Учитывая, что $a_{n-1} = a_n - d$ и $a_{n+1} = a_n + d$, получаем, что

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Эту формулу можно использовать для эквивалентного определения арифметической прогрессии.

Простейшими примерами арифметических прогрессий являются последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ (в этом случае $a_1 = 1$ и $d = 1$) и последовательность чётных натуральных чисел $2, 4, 6, \ldots, 2n$ (для этой прогрессии $a_1 = 2$ и $d = 2$). Применяя формулу суммы членов, получим, что для первой прогрессии $S_n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$, а для второй $S_n = (n+1)\cdot n$.

Геометрическая прогрессия

Определение 2: *Последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_k$ называется геометрической прогрессией, если отношение двух последовательных членов последовательности есть величина постоянная.*

Таким образом,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$$

при всех $n = 1, 2, \ldots, k - 1$. Значение q называется знаменателсм прогрессии.

Основные формулы:

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

где S_n — сумма n членов прогрессии.

Учитывая, что $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$ и $b_{n+1} = b_n\cdot q$, получаем, что

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2.$$

Эта формула может быть использована для эквивалентного определения геометрической прогрессии.

В качестве простейших примеров геометрических прогрессий можно рассмотреть последовательности 1, 2, 4, ..., 2^{n-1} (для этой прогрессии $b_1 = 1$ и $q = 2$) и $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ (в этом случае $b_1 = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$). Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получаем, что для первой прогрессии она равна $2^n - 1$, а для второй

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Геометрическая прогрессия назывется бесконечно убывающей, если она содержит бесконечное количество членов и $|q| < 1$. В этом (и только в этом случае) можно определить сумму S бесконечного количества членов прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Простейшим примером бесконечно убывающей геометрической прогрессии является последовательность $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ (в отличие от предыдущего примера число членов бесконечно). Её сумма равна 1.

Основные методы решения задач

Стандартным методом при решении задач, связанных с прогрессиями, является запись условий задачи в виде системы уравнений, в которых неизвестными являются, как правило, первый член прогрессии и её разность (знаменатель — в случае геометрической прогрессии), иногда также — количество членов прогрессии. При этом удобно вначале записать уравнения, в которые входят значения a_n (или b_n), а затем переписать эти уравнения, подставив выражения через a_1 и d (b_1 и q, если речь идёт о геометрической прогрессии).

Задача 1. *Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна* $\frac{5}{3}$, *а произведение третьего и четвёртого её членов равно* $\frac{65}{72}$. *Найти сумму семнадцати первых членов этой прогрессии.*

Решение: Условие задачи может быть записано в виде системы уравнений

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = \dfrac{5}{3} \\ a_3 \cdot a_4 = \dfrac{65}{72} \end{cases}$$

Подставляя вместо a_1, a_3, a_4 и a_5 выражения через a_1 и d, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2a_1 + 4d = \dfrac{5}{3} \\ (a_1 + 2d)\cdot(a_1 + 3d) = \dfrac{65}{72} \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения a_1 через d в виде $a_1 = \dfrac{5}{6} - 2d$ и подставив это выражение во второе уравнение, запишем его в виде

$$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{5}{6} + d\right) = \frac{65}{72}.$$

Из этого уравнения находим $\dfrac{5}{6} + d = \dfrac{13}{12}$, т.е. $d = \dfrac{1}{4}$. Подставляя в выражение для a_1, получаем, что $a_1 = \dfrac{1}{3}$.

Для того, чтобы определить требуемую сумму, найдём вначале $a_{17} = a_1 + 16d = \dfrac{13}{3}$ и после этого по формуле суммы

$$S_{17} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{13}{3}}{2}\cdot 17 = \frac{119}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{119}{3}$.

Задача 2. *Второй член геометрической прогрессии равен* 6, *а пятый член равен* 48. *Найти все такие n, при которых сумма первых n членов прогрессии меньше* 230.

Решение: Используя выражение члена общего геометрической прогрессии через b_1 и q, запишем условие задачи в виде

$$\begin{cases} b_1 q = 6 \\ b_1 q^4 = 48 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое (такой приём, кстати, часто бывает полезен при решении задач, связанных с геометрической прогрессией) и получим, что $q^3 = 8$, т.е. $q = 2$. Из первого уравнения находим $b_1 = 3$. Подставляя найденные значения в формулу суммы, получаем, что $S_n = 3\cdot(2^n - 1) < 230$. Отсюда следует, что $2^n < \frac{233}{3}$. Формальный ответ $n < \log_2\left(\frac{233}{3}\right)$ не является достаточным, поскольку по смыслу задачи значения n должны быть целыми. Однако, если учесть, что $2^6 = 64 < \frac{233}{3} < 128 = 2^7$, получим, что при $n < 7$ $S_n < \frac{233}{3}$, а при $n \geqslant 7$ $S_n > \frac{233}{3}$, поэтому условию задачи удовлетворяют все целые положительные значения $n < 7$.

Ответ: При $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Задача 3. *Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.*

Решение: Поскольку числа образуют геометрическую прогрессию, их можно записать как b, bq и bq^2. По условию числа b, bq и $bq^2 - 4$ образуют арифметическую прогрессию, т.е. $bq = \frac{(b + bq^2 - 4)}{2}$. Числа b, $bq - 1$ и $bq^2 - 5$ образуют геометрическую прогрессию, поэтому $(bq - 1)^2 = b(bq^2 - 5)$. После элементарных алгебраических преобразований получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными b и q:

$$\begin{cases} b\cdot(q - 1)^2 = 4 \\ b\cdot(2q - 5) = 1 \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем после приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов уравнение

$$q^2 - 10q + 21 = 0,$$

имеющее корни $q_1 = 7$ и $q_2 = 3$.

В первом случае $b = \frac{1}{9}$, во втором $b = 1$. Таким образом, задача имеет два решения: числа $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$ или числа 1, 3 и 9.

Ответ: $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9}$ или 1, 3, 9.

Задача 4. *Третий член геометрической прогрессии на 16 больше, чем первый, а седьмой на 208 больше, чем первый. Первый член целочисленной арифметической прогрессии равен − 7, тринадцатый больше пятого члена геометрической прогрессии, а тридцать второй меньше седьмого члена геометрической прогрессии. Найти разность арифметической прогрессии.*

Решение: Определим вначале геометрическую прогрессию. Если b_1 — её первый член, а q — знаменатель, то третий член равен b_1q^2, а седьмой — b_1q^6. Из условия задачи следует, что имеет место система уравнений

$$\begin{cases} b_1q^2 - b_1 = 16 \\ b_1q^6 - b_1 = 208 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое и используем формулу разности кубов. Получим уравнение

$$q^4 + q^2 + 1 = 13.$$

Для решения этого биквадратного уравнения обозначим $x = q^2$. Получим уравнение

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

Его корни равны $x_1 = 3$ и $x_2 = -4$. Для q получаем два уравнения: $q^2 = 3$ и $q^2 = -4$. Первое из них имеет решения $q_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, а второе решений не имеет. Значение b_1 при каждом из этих значений q равно 8, $b_5 = b_1q^4 = 72$, а $b_7 = b_1q^6 = 216$.

Обозначим через d разность арифметической прогрессии. Тогда из условия задачи следуют следующие неравенства:

$$\begin{cases} a_{13} = a_1 + 12d = -7 + 12d > 72 \\ a_{32} = a_1 + 31d = -7 + 31d < 216 \end{cases}$$

Первое из этих неравенств даёт условие $d > \frac{79}{12} = 6\frac{7}{12}$, а второе — $d < \frac{223}{31} = 7\frac{6}{31}$. Единственное целое число, удовлетворяющее каждому из этих условий, равно 7.

Ответ: $d = 7$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Шестой член геометрической прогрессии на 84 больше третьего члена, а восьмой член на 336 больше, чем пятый член этой прогрессии. Найти сумму первых десяти членов прогрессии.

2. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на её четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найти первый член и разность прогрессии.

3. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 9, а сумма первых шести членов равна (− 63). Первый член целочисленной арифметической прогрессии равен второму члену геометрической прогрессии, шестой больше третьего члена геометрической прогрессии, а четырнадцатый меньше пятого члена геометрической прогрессии. Найти шестой член арифметической прогрессии.

4. Второй член арифметической прогрессии равен 6, а пятый равен 21. Первый член геометрической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равен первому члену арифметической прогрессии, четвёртый член геометрической прогрессии меньше четвёртого члена арифметической прогрессии, а седьмой больше седьмого члена арифметической прогрессии. Найти седьмой член геометрической прогрессии.

Занятие № 7

Текстовые задачи

Задачи на составление систем уравнений традиционно считаются для абитуриентов одними из самых сложных. В значительной степени это объясняется, видимо, тем, что этапу решения составляемой системы уравнений (возможно, достаточно сложному, но всё же в большинстве случаев формально-техническому) предшествует этап составления системы уравнений (в некоторых случаях — одного уравнения), который в гораздо меньшей степени формализуем и требует от решающего понимания имеющихся в задаче условий и перевода их на язык математических уравнений. Каких-то универсальных методов при этом нет, без умения анализировать условия и логически мыслить решить такие задачи невозможно, однако некоторые достаточно типовые примеры полезно рассмотреть.

Одним из наиболее распространённых типов текстовых задач являются задачи на движение, основанные, по сути дела, на единственной элементарной физической формуле:

$$S = vt,$$

где S — путь, пройденный за время t при движении по прямой с постоянной скоростью v (формула может использоваться неоднократно, если скорость постоянна на каждом из нескольких участков, но меняется от участка к участку). При использовании этой формулы необходимо следить, чтобы величины S, v и t были выражены в соответствующих единицах, например, если S выражено в км, а t — в часах, то v обязательно должно быть выражено в км/час (но не в м/сек, например).

Прежде, чем приступать к составлению уравнений, необходимо внимательно прочитать текст задачи (возможно, даже не один раз) и осознать все содержащиеся в ней условия. Очень важным моментом является выбор величин, которые принимаются за неизвестные. Здесь требуется найти "золотую середину" между стремлением увеличить количество неизвестных, что облегчает составление системы уравнений, но усложняет её решение, и желанием ввести минимальное число неизвестных, что упрощает решение, но делает значительно более сложным составление уравнений. Универсального рецепта здесь нет, возможны различные подходы, но в целом полезно не вводить новые неизвестные, если какая-то величина элементарно выражается через уже введённые неизвестные, а если такое выражение не очевидно или сложно — ввести новую неизвестную.

В большинстве случаев удобно за неизвестную принимать ту величину, которую требуется определить в задаче, и такую возможность следует рассматривать в первую очередь, однако, это правило не является жёстким, иногда проще составить уравнения, в которые входят другие величины, и лишь после их определения найти окончательный ответ.

Очень важно проследить, чтобы в процессе составления системы уравнений были обязательно использованы все условия задачи — без этого правильного решения получить невозможно.

Количество уравнений должно совпадать с количеством неизвестных — лишь в этом случае система имеет определённое решение (возможно, не единственное, но часть решений обычно можно отбросить, исходя из физического смысла задачи). Из этого правила также могут быть исключения, если требуется найти не сами неизвестные, а лишь некоторое соотношение между ними.

Задача 1. *Мотоциклист отправился из пункта C в пункт D, отстоящий от C на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 30 мин. После остановки он продолжил путь до C, уменьшив скорость на 20 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил на час больше времени, чем на путь от C до D?*

Решение: Обозначим через x км/час первоначальную скорость мотоциклиста. Тогда на путь от C до D он затратил $\frac{120}{x}$ час. Время движения обратно складывается из трёх частей: движения со скоростью x км/час на протяжении одного часа (за это время он проехал x км), стоянки на протяжении получаса (30 минут) и прохождения оставшегося пути в $(120 - x)$ км со скоростью $(x - 20)$ км/час. Следовательно, общее время движения из C в D равно $1 + \frac{1}{2} + \frac{120 - x}{x - 20}$. По условию это на 1 час больше, чем $\frac{120}{x}$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{120}{x} + 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{120 - x}{x - 20}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем уравнение

$$x^2 + 20x - 4800 = 0,$$

имеющее корни $x_1 = 60$, $x_2 = -80$. Второй из этих корней не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 60 км/час.

Задача 2. *Один турист вышел из А в 6 часов, а второй — навстречу ему из В в 7 часов. Встретившись в 8 часов, они, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришёл в В на 28 мин. позже, чем второй в А?*

Решение: Обозначим через S км расстояние между А и В, а через t_1 час. и t_2 час. — время движения соответственно первого и второго туристов. Тогда их скорости равны соответственно $\frac{S}{t_1}$ км/час и $\frac{S}{t_2}$ км/час, т.е. до встречи первый за два часа прошел $2 \cdot \frac{S}{t_1}$ км, а второй за час прошел $\frac{S}{t_2}$ км. Это даёт первое уравнение системы:

$$2 \cdot \frac{S}{t_1} + \frac{S}{t_2} = S.$$

Первый турист вышел на 1 час раньше, а пришёл на 28 мин $= \frac{7}{15}$ час позже, т.е. он был в пути на $1\frac{7}{15}$ час дольше, что даёт второе уравнение системы:

$$t_1 - t_2 = \frac{22}{15}.$$

Сократив первое уравнение на S, получаем окончательный вид системы:

$$\begin{cases} \frac{2}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 1 \\ t_1 - t_2 = \frac{22}{15} \end{cases}$$

Выразив из второго уравнения t_1 через t_2 и подставив в первое уравнение, получаем:

$$\frac{2}{t_2 + \frac{22}{15}} + \frac{1}{t_2} = 1 .$$

После элементарных алгебраических преобразований получим уравнение:

$$15\,t_2^2 - 23\,t_2 - 22 = 0 .$$

Его корни равны $(t_2)_1 = \frac{11}{5}$, $(t_2)_2 = -\frac{2}{3}$. Второй из корней не подходит по смыслу задачи. Пользуясь выражением t_1 через t_2, находим: $t_1 = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$ час.

Ответ: Первый турист был в пути $\frac{11}{3}$ час. = 3 час. 40 мин.,

второй — $\frac{11}{5}$ час. = 2 час. 12 мин.

В некоторых случаях по смыслу задачи удобно увеличить количество неизвестных.

Задача 3. *Дорога от A до B длиной 11,5 км идёт сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошёл всю дорогу за 2 час. 54 мин., а на обратную дорогу затратил 3 час. 6 мин. Скорость ходьбы в гору 3 км/час, по ровному месту — 4 км/час, под гору — 5 км/час. На каком протяжении дорога идёт по ровному месту?*

Решение: Обозначим длину первого участка через x км, второго — через y км и третьего — через z км. Тогда общая протяжённость дороги равна $(x + y + z)$ км, что даёт первое уравнение системы:

$$x + y + z = 11{,}5.$$

Время движения по этим участкам составляет соответственно $\frac{x}{3}$ час., $\frac{y}{4}$ час. и $\frac{z}{5}$ час., что даёт второе уравнение:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 2\frac{54}{60} = 2{,}9.$$

При движении в обратную сторону участки ходьбы в гору и под гору меняются местами, поэтому третье уравнение системы имеет вид

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 3\frac{6}{60} = 3{,}1.$$

Попытки последовательно выражать одни неизвестные через другие приведут к достаточно утомительным выкладкам. Это решение будет получено проще, если обратить внимание на имеющуюся симметрию уравнений, и для её использования сложить два последних уравнения. Получим уравнение

$$\frac{8x}{15} + \frac{y}{2} + \frac{8z}{15} = 6.$$

Если теперь умножить первое уравнение на $\frac{8}{15}$ и вычесть из него полученное, останется уравнение $\frac{y}{30} = \frac{2}{15}$, т.е. $y = 4$. По условию задачи только эту неизвестную и было необходимо найти.

Ответ: 4 км.

Другим распространённым типом задач на составление уравнений являются задачи на работу, к которым примыкают знаменитые задачи о бассейнах («через одну трубу вливается, через другую выливается...») .

Задача 4. *Некоторое количество деталей должно быть изготовлено с использованием станков трёх разных конструкций. Если для работы использовать только первый и второй станки, она будет выполнена за 72 часа, если первый и третий — за 63 часа, а если второй и третий — за 56 часов. За какое время будет выполнено задание, если используются все три станка?*

Решение: Пусть на выполнение работы каждому из трёх станков требуется соответственно t_1, t_2 и t_3 часа. Тогда за 1 час на каждом из станков будет выполнено соответственно $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$ и $\frac{1}{t_3}$ от всей работы. Поэтому в ситуации, когда работают первый и второй станки, за один час выполняется $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}$ от всей работы. Следовательно,

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{72}.$$

Аналогично составляются два других уравнения:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_3}=\frac{1}{63}.$$

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{1}{56}.$$

При совместной работе всех трёх станков за час выполняется $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}$ от всей работы. Для того, чтобы найти эту величину, необязательно находить все три неизвестные величины, достаточно сложить три полученных уравнения. Получим:

$$2\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)=\frac{1}{72}+\frac{1}{63}+\frac{1}{56}=\frac{1}{21}.$$

Поэтому $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{1}{42}$, т.е. за час совместной работы всех трёх станков делается $\frac{1}{42}$ часть всей работы, а поэтому вся работа будет выполнена за 42 часа.

Ответ: За 42 часа.

Стандартным и несложным путём решаются задачи на проценты.

Задача 5. *Имелось два сплава меди, причём число, выражающее процентное содержание меди в первом сплаве, на* 20 *меньше числа, выражающего процентное содержание меди во втором сплаве. Затем эти два сплава сплавили вместе, после чего содержание меди составило* 24%. *Определить процентное содержание меди в каждом сплаве, если в первом сплаве было* 16 *кг меди, а во втором —* 8 *кг.*

Решение: Обозначим через x кг массу первого, а через y кг — второго сплава. Поскольку в первом сплаве содержится 16 кг меди, её процентное содержание равно $\frac{16}{x}\cdot 100 = \frac{1600}{x}$. Аналогично, процентное содержание меди во втором сплаве равно $\frac{800}{y}$. Это даёт первое уравнение для нахождения неизвестных:

$$\frac{800}{y} - \frac{1600}{x} = 20 .$$

В полученном сплаве 18 + 6 = 24 кг меди. Поскольку это составляет 24% от его массы, то масса полученного сплава равна 100 кг. Это приводит к уравнению

$$x + y = 100.$$

Сократив первое уравнение на 20 и подставив значение $y = 100 - x$ из второго уравнения, получим уравнение

$$\frac{40}{100 - x} - \frac{80}{x} = 1 .$$

После приведения к общему знаменателю и приведения подобных членов получаем уравнение

$$x^2 + 20x - 8000 = 0 .$$

Его корни $x_1 = -100$, $x_2 = 80$. Первый не подходит по смыслу, а для второго получаем, что процентное содержание меди в первом сплаве равно $\frac{16}{80}\cdot 100 = 20\%$. По условию процентное содержание меди во втором сплаве на 20% больше, т.е. равно 40%.

Ответ: В первом сплаве 20% меди, во втором — 40%.

В некоторых текстовых задачах приходится решать не систему уравнений, а систему уравнений и неравенств. За исключением необычности формулировок к принципиальным изменениям это не приводит.

Задача 6. *Сумма двух натуральных чисел равна* 28, *их произведение больше* 180, *а сумма квадратов больше* 400. *Найти эти числа.*

Решение: Обозначим числа через x и y. Тогда из условий задачи следует система уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x \cdot y > 180 \\ x^2 + y^2 > 400 \end{cases}$$

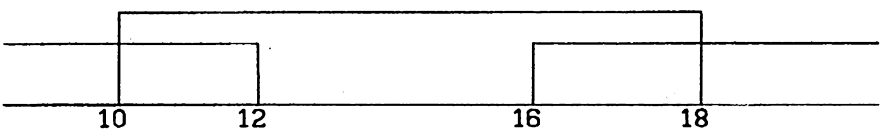
Из уравнения выразим y через x: $y = 28 - x$ и подставим это выражение в оба неравенства. После приведения подобных членов они преобразуются к системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 28x + 180 < 0 \\ x^2 - 28x + 192 > 0 \end{cases}$$

Решая соответствующие уравнения, получаем для первого из них корни $x_1 = 10$, $x_2 = 18$, т.е. решение этого неравенства по методу интервалов имеет вид $10 < x < 18$.

Аналогично, второе уравнение имеет корни $x_1 = 12$, $x_2 = 16$, т.е. решение неравенства имеет вид $x < 12$ или $x > 16$.

Для решения системы неравенств используем метод интервалов:



Получаем, что $10 < x < 12$ или $16 < x < 18$. В каждом из этих интервалов лежит только по одному целому числу, т.е. $x_1 = 11$, $x_2 = 17$. Поскольку $y_1 = 17$, $y_2 = 11$, фактически имеется единственное решение.

Ответ: 11 и 17.

Также не содержат принципиально новых моментов задачи, в которых само решение требуется найти в виде промежутка.

Задача 7. *Из пункта А выезжает мотоциклист, а через 12 минут в том же направлении — автомобиль, имеющий скорость на 12 км/час больше, чем мотоциклист. При каких значениях скорости автомобиля он догонит мотоциклиста, проехав не более 48 км ?*

Решение: Обозначим через x км/час скорость автомобиля. Тогда скорость мотоциклиста равна $(x - 12)$ км/час. Если t час. — время, которое ехал до встречи автомобиль, то мотоциклист ехал до встречи $\left(t + \frac{1}{5}\right)$ часа.

Получаем систему из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} x\cdot t = (x-12)\cdot(t+\frac{1}{5}) \\ x\cdot t \leqslant 48 \end{cases}$$

Раскрывая скобки в первом уравнении и приводя подобные члены, получаем уравнение

$$x - 60t - 12 = 0.$$

Выражая из этого уравнения t через x и подставляя это значение в неравенство, получаем после элементарных преобразований неравенство

$$x^2 - 12x - 2880 \leqslant 0.$$

Корни соответствующего уравнения равны $x_1 = -48$ и $x_2 = 60$, а решение по методу интервалов даёт промежуток $-48 \leqslant x \leqslant 60$. Учитывая, что по смыслу задачи x должно превосходить 12, получаем ответ.

Ответ: При скорости автомобиля, превышающей 12 км/час и не превосходящей 60 км/час, он догонит мотоциклиста, проехав не более 48 км.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Велосипедист, проехав 1/3 расстояния от A до B, остановился на 40 минут, после чего увеличил свою скорость на 5 км/час и прибыл в B через 4 часа после отправления из A. Чему равно расстояние от A до B, если известно, что в пункте C, расположенном на равном расстоянии от A и B, велосипедист был через 2 часа 30 минут после выезда из A?

2. Из пункта A отправилась машина в пункт B. Через 20 минут за ней выехал мотоциклист со скоростью 60 км/час. Догнав машину, мотоциклист передал шоферу пакет и тотчас повернул обратно. Машина прибыла в пункт B в тот момент, когда мотоциклист оказался на половине пути от места встречи с машиной до пункта A. Определить скорость машины, если расстояние между A и B равно 82,5 км.

3. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 часа 20 минут. За какое время пройдёт расстояние каждый из них, если первый пришёл в то место, из которого вышел второй, на 5 часов позже, чем второй пришёл в то место, из которого вышел первый?

4. Два одинаковых бассейна одновременно начали наполняться водой. В первый бассейн поступает в час на 30м^3 больше воды, чем во второй. В некоторый момент в двух бассейнах вместе оказалось столько воды, сколько составляет обьём каждого из них. После этого через 2 часа 40 минут наполнился первый бассейн, а ещё через 3 часа 20 минут — второй. Сколько воды поступало в час в каждый бассейн?

5. Два автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 часов. Второй автомобиль задержался в гараже, и когда он прибыл на место погрузки, первый уже перевёз 3/5 всего груза. Остальную часть груза перевёз второй грузовик, и весь груз был перевезён, таким образом, за 12 часов. Сколько времени нужно было каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

6. Имеются два сплава золота и серебра. В одном сплаве количество этих металлов находится в отношении 1:3, а в другом — 2:3. Сколько граммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 34 г сплава, в котором золото и серебро находятся в отношении 5:12?

7. Сумма двух натуральных чисел равна 25, сумма их квадратов больше 313, а сумма кубов меньше 4375. Найти эти числа.

8. Разность двух натуральных чисел равна 15, их сумма меньше 44, а произведение больше 364. Найти эти числа.

9. Бассейн может заполняться через две трубы, причём заполнение бассейна через первую трубу происходит на пять часов медленнее, чем через вторую. При каких значениях времени заполнения бассейна через первую трубу заполнение бассейна через обе трубы одновременно продолжается не менее шести часов?

10. Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10,5 км, выходит пешеход. Через 20 минут в том же направлении со скоростью на 1,5 км/час больше выходит второй пешеход, который, догнав первого, разворачивается и возвращатся в А. При каких значениях скорости первого пешехода он придёт в Б раньше, чем второй вернётся в А ?

Занятие № 8

Тригонометрические функции

(Алгебра и начала анализа, гл.I, 1.)

Характерной особенностью тригонометрических задач является необходимость использования при их решении большого числа разнообразных формул. В связи с этим, видимо, главная трудность заключается в том, чтобы выбрать именно те формулы и свойства тригонометрических функций, которые наиболее полезны в конкретной ситуации. Для того, чтобы ввести некоторую систему в изобилие формул, будем рассматривать их группами, близкими по смыслу и методам применения, иллюстрируя методику использования соответствующими примерами. Лучший способ тренировки в технике использования тригонометрических формул — доказательство тождеств, поскольку при этом сама постановка задачи нередко подсказывает метод её решения.

Определения и основные формулы

Напомним, что тригонометрические функции угла α определяются с помощью тригонометрической окружности (окружности единичного радиуса с центром в начале координат) как проекции точки B на окружности такой, что угол AOB равен α, на ось абсцисс (косинус) и на ось ординат (синус) (см. рис.1) так, что

$$\cos\alpha = OC \quad \text{и} \quad \sin\alpha = OD.$$

Из этого определения, в частности, можно получить значения функций некоторых простых углов:

$$\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1,$$

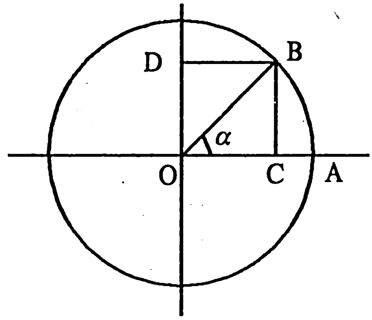


Рис. 1.

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

Применяя теорему Пифагора к треугольнику BOC, получаем основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 . \tag{1}$$

Для определения тангенса и котангенса проще всего использовать формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} , \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} . \tag{3}$$

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} , \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} . \tag{5}$$

Используя формулы (1) — (5), можно получить выражения всех тригонометрических функций через одну из них. Например, выражая через синус, имеем:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Знак перед корнем выбирается либо "+", либо "−" (но не оба одновременно!) в зависимости от того, в какой координатной четверти лежит угол α.

Формула (1) вполне заслуженно называется основным тригонометрическим тождеством — по частоте своего применения она превосходит любую другую. Важнейшим принципиальным следствием из неё является то, что квадраты синуса и косинуса просто выражаются друг через друга. В частности, формула (4) (для формулы (5) рассуждения аналогичны) является иллюстрацией этого — она элементарно выводится из основного тригонометрического тождества и определения тангенса формулой (2):

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Задача 1. *Доказать тождество*

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1.$$

Решение: Преобразуем левую часть тождества, используя формулу суммы кубов и основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\cdot\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \right.$$
$$\left. + \cos^4\alpha\right) + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$
$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 = 1.$$

Функции от сумм и разностей углов

$$\sin\left(\alpha+\beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha, \qquad (6)$$

$$\sin\left(\alpha-\beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \qquad (7)$$

$$\cos\left(\alpha+\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad (8)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,, \tag{9}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,. \tag{11}$$

Задача 2. *Доказать тождество*

$$\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\,.$$

Решение: Вид тождества подсказывает (как один из возможных путей решения) применение формул косинуса суммы и разности (8) и (9):

$$\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\sin^2\alpha+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=\sin^2\alpha+\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=$$

$$=\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\,.$$

Функции двойных углов

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\,, \tag{12}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,. \tag{14}$$

Отметим два полезных следствия из формулы (12) и основного тригонометрического тождества, которые применяются едва ли не чаще, чем сама формула (12):

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1\,, \tag{15}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \,. \qquad (16)$$

Задача 3. *Доказать тождество*

$$8\cos^4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha \,.$$

Решение: В этой задача наглядно проявляется удобное свойство, вытекающее из формулы (15): косинусы чётных углов просто выражаются через косинус исходного угла. Дважды применим эту формулу для преобразования правой части:

$$3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 3 + 4\cdot\left(2\cos^2\alpha - 1\right) + 2\cos^2 2\alpha - 1=$$
$$= 8\cos^2\alpha - 2 + 2\,(2\cos^2\alpha - 1)^2 = 8\cos^2\alpha - 2 + 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 2 = 8\cos^4\alpha \,.$$

Функции половинных углов

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\,, \qquad (17)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\,, \qquad (18)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}\,. \qquad (19)$$

В учебниках эти формулы часто записываются в форме с радикалами (например, (17) — в форме $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$), однако, необходимо учитывать каждый раз знак (один из двух !) , который должен стоять перед корнем. Для предложенной формы таких проблем не возникает.

Задача 4. *Доказать тождество*

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\alpha \,.$$

Решение: Применим в левой части формулы (17) и (18):

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 1 + 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha}{4} =$$
$$= \frac{2 + 2\cos^2 2\alpha}{4} = \frac{2 + 1 + \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\alpha .$$

Формулы сумм и разностей синусов и косинусов

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (20)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (21)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (22)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (23)$$

Эти формулы оказываются особенно полезны, если в выражении присутствуют углы, не связанные простыми соотношениями кратности (как было, например, в задаче 3, где угол 2α в два раза больше угла α, а угол 4α в два раза больше угла 2α).

Задача 5. *Доказать тождество*

$$\sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha - \sin 9\alpha = -4\sin\alpha\cos 6\alpha\cos 2\alpha .$$

Решение: Применим формулу (20), а затем (22), при этом удобно группировать слагаемые так, чтобы после применения этих формул получились одинаковые углы, в данном случае складываем первое слагаемое со вторым, а третье — с четвёртым.

$$\sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha - \sin 9\alpha = -2\sin\alpha\cos 4\alpha - 2\sin\alpha\cos 8\alpha =$$
$$= -2\sin\alpha\cdot\left(\cos 4\alpha + \cos 8\alpha\right) = -4\sin\alpha\cos 6\alpha\cos 2\alpha.$$

Задача 6. *Доказать тождество*

$$\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\alpha\cos\beta .$$

Решение: Преобразуем левую часть тождества, используя формулы (17) и (18), а затем формулу (22) суммы косинусов:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{2} - \frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2} =$$
$$= \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} = \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Формулы преобразования произведения в сумму или разность

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) , \tag{24}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) , \tag{25}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) . \tag{26}$$

Задача 7. *Доказать тождество*

$$\sin2\alpha\cos6\alpha + \sin4\alpha\cos12\alpha = \sin6\alpha\cos10\alpha .$$

Решение: Дважды применим формулу (25), учитывая нечётность синуса, а затем формулу (21) разности синусов:

$$\sin2\alpha\cos6\alpha + \sin4\alpha\cos12\alpha = \frac{1}{2}\cdot\sin8\alpha - \frac{1}{2}\cdot\sin4\alpha + \frac{1}{2}\cdot\sin16\alpha - \frac{1}{2}\cdot\sin8\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin16\alpha - \sin4\alpha\right) = \frac{1}{2}\cdot2\sin6\alpha\cos10\alpha = \sin6\alpha\cos10\alpha .$$

Формулы приведения

Этот набор формул связывает значения функций от α с функциями от углов $\beta \pm \alpha$, где β содержит целое число π (т.е. $\beta = n\pi$ при целом значении n) или полуцелое число π (такой термин используется, если $\beta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ при целом значении n).

Общее количество получающихся при этом формул слишком велико, чтобы их имело сиысл запоминать по отдельности, полезнее использовать следующее правило, состоящее из двух частей:

1) если β содержит целое число π, название функции остаётся без изменений, если полуцелое - меняется на двойственное (синус - на косинус, косинус - на синус, тангенс - на котангенс, котангенс - на тангенс).

2) знак перед функцией от α выбирается исходя из того, какой знак имеет соответствующая функция от $\beta + \alpha$ в полученной четверти (при этом угол α считается острым и малым - хотя формула справедлива при любых значениях α).

Например, для функции $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ получаем, что косинус заменяется на синус (угол $\frac{3\pi}{2}$ содержит полуцелое количество π), а поскольку при остром угле α угол $\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ расположен в третьей четверти, где косинус отрицателен, перед синусом требуется взять минус. Таким образом, $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$.

Задача 8. *Доказать тождество*

$$1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi) = 4\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha\ .$$

Решение: Используем вначале формулы приведения. Учитывая, что π и 2π содержат целое количество π, получаем, что останутся косинусы, при малых острых углах α углы $2\alpha - \pi$ и $4\alpha + \pi$ лежат в третьей четверти (косинус отрицателен), а угол $(6\alpha - 2\pi)$ — в первой (косинус положителен). Поэтому по формулам приведения получаем, что

$$1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi) = 1 + \cos2\alpha + \cos4\alpha + \cos6\alpha\ .$$

Преобразуем теперь полученное выражение, используя формулу суммы косинусов (22) для второго и третьего слагаемых и формулу косинуса удвоенного угла в варианте (15) для последнего:

$$1 + \cos2\alpha + \cos4\alpha + \cos6\alpha = 1 + 2\cos3\alpha\cos\alpha + 2\cos^2 3\alpha - 1 =$$
$$= 2\cos3\alpha \cdot \left(\cos\alpha + \cos3\alpha\right) = 4\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать тождество

$$2\cdot\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)-3\cdot\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)+1=0\,.$$

2. Доказать тождество

$$\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha+\sin 2\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha\,.$$

3. Доказать тождество

$$\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha\,.$$

4. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,.$$

5. Доказать тождество

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\sin 2\alpha\,.$$

6. Доказать тождество

$$\frac{\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\sin 3\alpha+2\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}\,.$$

7. Доказать тождество

$$1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha\,.$$

8. Доказать тождество

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta=\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,.$$

9. Доказать тождество

$$\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}.$$

10. Доказать тождество

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha\,.$$

Занятие № 9

Решение тригонометрических уравнений

(Алгебра и начала анализа, гл.I.3)

Как правило, тригонометрические уравнения, содержащие прямые тригонометрические функции, сводятся цепочкой равносильных преобразований, заменами и решениями алгебраических уравнений к элементарным тригонометрическим уравнениям вида:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Общие их решения имеют, соответственно, вид:

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z, \ |a| \leqslant 1,$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \ n \in Z, \ |a| \leqslant 1,$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z,$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z.$$

Частные случаи решения простейших уравнений для некоторых значений a:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in Z.$$

Кроме того, полезно использовать соотношения:

$$\arcsin\frac{1}{2} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6},$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Рассмотрим основные типы тригонометрических уравнений и методы их решения.

1. Уравнения, в которых все функции выражаются через одну тригонометрическую функцию от одного и того же аргумента.

Примеры:

$$\sin^2 x - \cos x - 1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} 3x + 2\operatorname{ctg} 3x - 3 = 0.$$

Преобразованиями, соответственно, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $\operatorname{ctg} 3x = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$ эти уравнения приводятся к алгебраическим, решая которые получаем элементарные тригонометрические уравнения.

Задача 1. *Решить уравнение*

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

Решение: Воспользуемся тем, что по основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x$ легко выражается через $\sin^2 x$. Получим уравнение

$$2\cdot(1-\sin^2 x)+5\sin x-4=0.$$

После приведения подобных членов и умножения обеих частей уравнения на -1 получаем уравнение

$$2\sin^2 x-5\sin x+2=0.$$

Введем новую неизвестную $y=\sin x$. Получаем уравнение

$$2y^2-5y+2=0.$$

Его корни $y_1=2$, $y_2=\frac{1}{2}$, что даёт два уравнения: $\sin x=2$, не имеющее решений, т.к. $|\sin x|\leqslant 1$ при всех x, и $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда следует, что $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=$ $=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$

2. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$.

$$a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+\ldots+a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0.$$

Если $a_0\neq 0$, то $\frac{\pi}{2}+\pi n$ не является корнем уравнения. Поэтому при делении всех частей уравнения на $\cos^n x$ не произойдет потери корней и

$$a_0\,\mathrm{tg}^n x+a_1\,\mathrm{tg}^{n-1}x+\ldots+a_{n-1}\,\mathrm{tg}\,x+a_n=0.$$

Решая это уравнение, придем к элементарному. В случае $a_0=0$, или $a_n=0$, имеет смысл вынести за скобки $\sin x$ или $\cos x$. Получим, что произведение равно нулю.

Примеры однородных уравнений:

$$3\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=0,$$

$$2\sin^3 5x-2\sin^2 5x\cos 5x+\sin 5x\cos^2 5x-\cos^3 5x=0,$$

$$3\sin 7x-2\cos 7x=0.$$

3. Уравнения, сводящиеся к однородным.

Если все слагаемые, входящие в уравнение, относительно $\sin x$ и $\cos x$ отличаются на чётный порядок однородности, то это уравнение применением основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ приводится к однородному

Примеры:

$$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 2,$$

$$\sin^3 x + \sin x \cos^2 x - 2\cos x = 0.$$

Эти уравнения эквивалентны однородным уравнениям:

$$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 2\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$\sin^3 x + \sin x \cos^2 x - 2\cos x\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0.$$

Задача 2. *Решить уравнение*

$$2\sin^2 x + 6 = 13\sin 2x.$$

Решение: Используем формулу синуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, записав уравнение в виде

$$2\sin^2 x + 6\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x) = 13\cdot 2\cdot \sin x \cos x,$$

или, после приведения подобных членов, — в виде

$$4\sin^2 x - 13\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. После деления получаем уравнение

$$4\,\mathrm{tg}^2 x - 13\,\mathrm{tg}\, x + 3 = 0.$$

Замена $y = \mathrm{tg}\, x$ приводит его к виду

$$4y^2 - 13y + 3 = 0$$

с корнями $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = 3$. Получаем, что $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{4}$, т.е. $x = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{4} + \pi n$, или $\mathrm{tg}\, x = 3$, т.е. $x = \mathrm{arctg}\, 3 + \pi n$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$.

4. Уравнения, линейные относительно $\sin x$ и $\cos x$

$$a\sin x + b\cos x = c.$$

Интересен случай, при котором $a \cdot b \cdot c \neq 0$.
Примеры:

$$\sin x + 4\cos x = 1,$$

$$3\sin 5x - 4\cos 5x = 2,$$

$$2\sin 3x + 5\cos 3x = 8.$$

Заметим, что последнее уравнение не имеет решений, так как левая часть его заведомо не превосходит семи.

Одним из способов решения уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$ является введение дополнительного аргумента φ. Разделим обе части уравнения на выражение $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1,$$

то найдётся аргумент φ, при котором

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Уравнение примет вид

$$\sin x \cos\varphi + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда из формулы (6) (здесь и далее до конца пособия ссылка идёт на формулы занятия 8) следует

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

и решением будет

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi n.$$

Решение этого уравнения существует при $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.

Задача 3. *Решить уравнение*

$$8\sin 3x - 3\cos 3x = 4.$$

Решение: Разделим обе части уравнения на число $\sqrt{8^2 + (-3)^2} = \sqrt{73}$. Получим уравнение

$$\frac{8}{\sqrt{73}}\sin 3x - \frac{3}{\sqrt{73}}\cos 3x = \frac{4}{\sqrt{73}}.$$

Заметим, что $\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2 = 1$ (именно с этой целью осуществлялось деление на $\sqrt{73}$), поэтому, если $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}$, т.е. $\alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}$ (нам требуется конкретное значение α, поэтому незачем брать бесконечную серию), то по основному тригонометрическому тождеству $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{73}}$. Поэтому уравнение может быть записано в виде

$$\sin 3x\cos\alpha - \cos 3x\sin\alpha = \sin(3x - \alpha) = \frac{4}{\sqrt{73}}.$$

Очевидно, что $\frac{4}{\sqrt{73}} < 1$, так что $3x - \alpha = (-1)^n \arcsin\frac{4}{\sqrt{73}} + \pi n$, т.е.

$$x = \frac{1}{3}\cdot(-1)^n \arcsin\frac{4}{\sqrt{73}} + \frac{1}{3}\cdot\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{3}\cdot(-1)^n \arcsin\frac{4}{\sqrt{73}} + \frac{1}{3}\cdot\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

5. Уравнения, сводящиеся к равенству одной тригонометрической функции от различных аргументов:

$$\sin x = \sin y, \quad \cos x = \cos y, \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y.$$

В последних уравнениях имеет место равенство тогда и только тогда, когда, соответственно,

$$x = (-1)^n\cdot y + \pi n, \quad x = \pm y + 2\pi n, \quad x = y + \pi n.$$

Примеры:

$$\cos 4x = \sin 6x,$$

$$\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}\frac{1}{x}.$$

Первое уравнение применением формул приведения приводится к виду

$$\sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = \sin 6x,$$

а второе — к виду

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{tg}\frac{1}{x}.$$

Заметим, что решение уравнений $\sin x = \sin y$ и $\cos x = \cos y$ возможно применением формул (21) и (23).

Задача 4. *Решить уравнение*

$$\sin 4x - \cos 7x = 0.$$

Решение: Используем то, что по формулам приведения $\cos 7x = \sin(\frac{\pi}{2} - 7x)$. Получим уравнение

$$\sin 4x - \sin(\frac{\pi}{2} - 7x) = 0.$$

Применяя формулу разности синусов (формула (21)), запишем его в виде

$$2\cdot\sin(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}) = 0.$$

Приравнивая нулю сомножители, получим два уравнения:
$\sin(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 0$, $\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n$, $x = \frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11}$ и $\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}) = 0$, $\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{22} + \frac{2\pi n}{11}$, $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$.

6. Уравнения, содержащие алгебраическую сумму синусов и косинусов от различных аргументов.

Примеры:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0,$$

$$\cos x - \cos 2x + \sin 3x = 0,$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

В этих уравнениях следует сгруппировать члены соответствующим образом и, использовав формулы (20) — (23), применить разложение на множители.

Задача 5. *Решить уравнение*

$$\cos 2x - \cos^2 3x + \cos 6x = \cos 8x + \sin^2 3x.$$

Решение: Заметив, что уравнение содержит тригонометрическую единицу, произведём группировку:

$$(\cos 2x + \cos 6x) - (1 + \cos 8x) = 0.$$

Применив формулы (22) и (17), получим

$$2\cos 4x \cos 2x - 2\cos^2 4x = 0,$$

$$\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0.$$

Формула (23) приводит уравнение к виду

$$\cos 4x \sin 3x \sin x = 0,$$

которое распадается на три: $\cos 4x = 0$, $\sin 3x = 0$, $\sin x = 0$. Последнее уравнение можно не рассматривать, так как все его решения содержатся во множестве решений второго.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8}\cdot(2n+1),\ x = \frac{\pi n}{3}.$

7. Уравнения, содержащие алгебраическую сумму синусов, косинусов и их квадратов от различных аргументов.

Примеры:

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{2}\cdot\cos 6x = 1,$$

$$\cos^2 x + 2\sin^2 5x + \frac{\cos 10x}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\sin 5x + \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x.$$

Для решения таких уравнений следует применить формулы (см.(17) и (18))

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

что приведёт их к уравнениям 6 типа.

Задача 6. *Решить уравнение*

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

Решение: Используем формулу (18) для выражения $\sin^2 x$ через $\cos 2x$, что позволяет сразу же избавиться от квадратов. Получим уравнение

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2},$$

или, после упрощений, — уравнение

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x.$$

Применяя в обеих частях уравнения формулу (22) суммы косинусов, получим уравнение

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x,$$

что сразу же даёт уравнение $\cos x = 0$ с корнями $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. После этого (и только после решения этого уравнения !) можно сократить обе части на $2\cos x$, сведя к уравнению

$$\cos 3x - \cos 7x = 0.$$

Применяя формулу разности косинусов (23), получим уравнение

$$2\sin 5x \sin 2x = 0.$$

Приравнивая нулю сомножители, получим два уравнения: $\sin 5x = 0$, $5x = \pi m$, $x = \frac{\pi m}{5}$ и $\sin 2x = 0$, $x = \frac{\pi k}{2}$. Заметим, что первая серия корней полностью входит в состав третьей, так что в окончательном ответе можно оставить только две последние серии. Однако, более внимательный анализ показывает, что эти серии включают в себя одинаковые решения: при $m=5l$ и $k=2l$ $\frac{\pi m}{5}=\frac{\pi k}{2}=\pi l$. В то же время при $k=2n+1$ последняя серия корней даёт значения $\frac{\pi}{2}+\pi n$, совпадающие с первой серией. Поэтому наиболее точный ответ должен включать первую и вторую серии корней (оставить в ответе вторую и третью будет неточностью, но не ошибкой).

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi m}{5},\ n, m \in Z.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение

$$11-16\sin^2 x+16\cos x=0.$$

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 4x+\cos 6x=0.$$

4. Решить уравнение

$$3\sin 4x+6\cos 4x=1.$$

5. Решить уравнение

$$1-5\sin x\cos x+5\cos^2 x=0.$$

6. Решить уравнение

$$3\operatorname{ctg}^2 x-4\cos^2 x=6.$$

7. Решить уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=\frac{9}{16}.$$

8. Решить уравнение

$$tg^2 3x - 2\sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

9. Решить уравнение

$$\sin 2x + \cos 5x = 0.$$

Занятие № 10

Решение тригонометрических уравнений (продолжение)

8. Выделение полного квадрата в тригонометрических уравнениях.

Примеры:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x,$$

$$\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x,$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin 2x.$$

Метод применим для уравнений, содержащих следующие выражения:

$$\sin^4 x + \cos^4 x,\ \ \sin^6 x \pm \cos^6 x,\ \ \sin^8 x \pm \cos^8 x.$$

Преобразуем некоторые выше указанные выражения:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)\cdot(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \frac{1}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x,$$

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\cdot(\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= -\cos 2x\cdot(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x) = \cos 2x\cdot(\frac{1}{4}\sin^2 2x - 1).$$

Заметим также, что к приведённым выше выражениям можно применить формулы понижения степени (17) и (18).

Задача 1. *Решить уравнение*

$$\sin^4\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \cos 2x = 0.$$

Решение: Применив первую из выведенных формул, получим

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - \cos 2x = 0.$$

Далее можно применить формулы (1) и (12). Тогда получим простейшее уравнение $\sin x = 0$.

Ответ: $x = \pi n$.

9. Уравнения вида

$$f(\sin x + \cos x, \sin x\cos x) = 0,\ \ f(\sin x - \cos x, \sin x\cos x) = 0.$$

Применением замены $\sin x + \cos x = t$ или $\sin x - \cos x = t$ такие уравнения значительно упрощаются.

Примеры:

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x,$$

$$6\sin x\cos x + 2\sin x = 2 + 2\cos x,$$

$$3\sin 3x = 1 + 3\cos 3x - \sin 6x.$$

Предложенные примеры уравнений можно записать в общем виде:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin 2x + c = 0,$$

$$a(\sin x - \cos x) + b\sin 2x + c = 0.$$

Эти уравнения сводятся к квадратным. В первом уравнении, сделав замену $\sin x + \cos x = t$, получим $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$ и $\sin 2x = t^2 - 1$. Во втором после замены $\sin x - \cos x = t$ получим $\sin 2x = 1 - t^2$.

Задача 2. *Решить уравнение*

$$5\sin 2x - 13\cdot(\sin x + \cos x) + 13 = 0.$$

Решение: Введем новую неизвестную $y = \sin x + \cos x$. Уравнение запишется в виде

$$5(y^2 - 1) - 13y + 13 = 0$$

или, после приведения подобных членов, — в виде

$$5y^2 - 13y + 8 = 0.$$

Его корни $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{8}{5}$. Это приводит к двум уравнениям: $\sin x + \cos x = 1$ и $\sin x + \cos x = \frac{8}{5}$. Для решения первого из них, умножая обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим уравнение

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и воспользуемся тем, что $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. Уравнение можно переписать в виде

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n.$

Второе уравнение решается аналогично, оно сводится к виду

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

Прежде, чем выписывать ответ, следует проанализировать, имеет ли это уравнение решение, т.е. выполняется ли условие $\frac{4\sqrt{2}}{5} \leqslant 1$. Поскольку $\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{32}{25} > 1$, то $\frac{4\sqrt{2}}{5} > 1$ и поэтому решений у второго уравнения нет. Заметим, что это одна из часто встречающихся грубых ошибок: легко заметить отсутствие решений у уравнения $\sin x = a$, если a равно, например, 2 (хотя и в этом случае иногда автоматически записывают бессмысленное решение $x = (-1)^n \arcsin 2 + \pi n$), если же a имеет более сложный вид, как в данной ситуации, вероятность не заметить отсутствия решений резко возрастает.

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

10. Универсальная тригонометрическая подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ позволяет все тригонометрические функции аргумента x выразить рационально относительно t.

Выразим функции $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Отсюда следует, что, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, то $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$.

Следует заметить, что универсальная подстановка может привести к потере корней уравнения, равных $x = \pi + 2\pi n$, так как при этих значениях x $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует.

Примеры:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \sin x = 1,$$

$$\cos 2x + \sin 2x - \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Отметим, что к уравнению $a\sin x + b\cos x = c$, рассмотренному в занятии 9, можно применить универсальную подстановку.

Задача 3. *Решить уравнение*

$$\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2.$$

Решение: Применим замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{1}{t}$ и

$$\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t} = 2.$$

Умножив обе части этого уравнения на $t(t^2 + 1)$, получим кубическое уравнение

$$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Левую часть уравнения разложим на множители:

$$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 2t^3 - 2t^2 - t^2 + 2t - 1 =$$
$$= 2t^2(t-1) - (t-1)^2 = (t-1)\cdot(2t^2 - t + 1).$$

Так как уравнение $2t^2 - t + 1 = 0$ не имеет решений, то $t = 1$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$. Можно проверить, что $x = \pi + 2\pi n$ не является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

11. Метод разложения на множители.
Примеры:

$$3\operatorname{tg}5x\cdot\sin x - 3\operatorname{tg}5x + \sin x - 1 = 0,$$

$$4\cos x - 2\sin 7x + 8\cos x\sin 7x = 1.$$

Разложением на множители первое уравнение приводится к виду $(3\operatorname{tg}5x + 1)\cdot(\sin x - 1) = 0$, а второе — к виду $(2\cos x - \frac{1}{2})\cdot(\sin 7x + \frac{1}{2}) = 0$.

Задача 4. *Решить уравнение*

$$2\sin 2x - 1 - \operatorname{tg}x\sin x - \cos x + 4\sin x = 0.$$

Решение: Умножим обе части равенства на $\cos x$ и разложим левую часть на множители:

$$2\sin 2x\cos x-\cos x-\sin^2 x-\cos^2 x+4\sin x\cos x=0,$$

$$2\sin 2x\cos x-\cos x-1+2\sin 2x=0,$$

$$\cos x\cdot(2\sin 2x-1)+(2\sin 2x-1)=0,$$

$$(2\sin 2x-1)\cdot(\cos x+1)=0.$$

Решения уравнений $2\sin 2x-1=0$ и $\cos x+1=0$ будут являться решениями исходного уравнения, так как входят в область допустимых значений.

Ответ: $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ x=\pi+2\pi n,\ n\in Z.$

12. Метод исследования области изменения левой и правой частей уравнения.

Примеры:

$$3\sin^5 x+2\cos^{10} x=5,$$

$$2\sin^2 2x+1=\cos 5x,$$

$$\sin 9x+\cos 3x=-2.$$

Каждое из этих уравнений эквивалентно системе из двух уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases}\sin^5 x=1\\ \cos^{10} x=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2x=0\\ \cos 5x=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 9x=-1\\ \cos 3x=-1\end{cases}$$

Задача 5. *Решить уравнение*

$$(\cos 2x-\cos 4x)^2=4+\cos^2 x.$$

Решение: Так как левая часть уравнения не превосходит 4, а правая не менее 4, то это уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases}(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4\\ \cos x = 0\end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Тогда для левой части первого уравнения системы имеем

$$\left(\cos(2\cdot(\frac{\pi}{2} + \pi n)) - \cos(4\cdot(\frac{\pi}{2} + \pi n))\right)^2 =$$
$$= \left(\cos(\pi + 2\pi n) - \cos(2\pi + 4\pi n)\right)^2 = (-2)^2 = 4.$$

Следовательно, решения второго уравнения являются решениями первого и являются решениями исходного уравнения. Других решений быть не может.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

Приведенные типы уравнений и методы их решений, конечно, не исчерпывают всё разнообразие тригонометрических уравнений. Поэтому рассмотрим дополнительно несколько уравнений.

Задача 6. *Решить уравнение*

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x - \frac{1}{\sin x} + \frac{7}{4}.$$

Решение: Возведём в квадрат обе части равенства $\sin x - \frac{1}{\sin x} = t$. Тогда $\sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} = t^2$ и $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = t^2 + 2$. Наше уравнение примет вид

$$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$$

или $(t - \frac{1}{2})^2 = 0$.

Следовательно, $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}$ и $2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$.

Положим $\sin x = y$, $|y| \leqslant 1$. Тогда $2y^2 - y - 2 = 0$ и $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$. Условию $|y| \leqslant 1$ удовлетворяет только решение $y = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$.

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin\frac{1 - \sqrt{17}}{4} + \pi n$.

Задача 7. *Решить уравнение*

$$\cos 4x - 3\cos 2x = 4\cos^2 x.$$

Решение: Воспользуемся тем, что $\cos^2 x$ просто выражается через $\cos 2x$ (формула (15)). В связи с тем, что в уравнении появляются члены с $\cos 2x$, для $\cos 4x$ удобно использовать его выражение через $\cos 2x$ (формула (13)). Получим уравнение

$$2\cos^2 2x - 1 - 3\cos 2x = 4\cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

или, после приведения подобных членов, — уравнение

$$2\cos^2 2x - 5\cos 2x - 3 = 0.$$

Сделав замену $y = \cos 2x$, получим уравнение

$$2y^2 - 5y - 3 = 0.$$

Его корни $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, что даёт уравнения $\cos 2x = 3$, не имеющее решений, и $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, имеющее решения $2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$, т.е.

$$x = \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n.$$

Полученный ответ является правильным, но может быть записан в более простом виде, если использовать известную формулу: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, откуда следует, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n.$

Задача 8. *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}^2 4x = 4\sin^2 2x.$$

Решение: Поскольку $\operatorname{tg}^2 4x = \frac{\sin^2 4x}{\cos^2 4x}$, ОДЗ определена условием: $\cos^2 4x \neq 0$. Используем для $\sin 4x$ формулу синуса удвоенного угла и запишем уравнение в виде

$$\frac{4\sin^2 2x\cos^2 2x}{\cos^2 4x} = 4\sin^2 2x.$$

Общий множитель $\sin^2 2x$ в обеих частях уравнения даёт уравнение $\sin 2x = 0$ с корнями $x = \frac{\pi n}{2}$. Из формулы $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$ следует, что все эти корни входят в ОДЗ. Сокращая обе части уравнения на $4\sin^2 2x$ и приводя к общему знаменателю, получаем уравнение

$$\cos^2 2x = \cos^2 4x.$$

Далее можно действовать двумя способами, выражая обе части уравнения через $\cos 2x$ или через $\cos 4x$. Второй способ несколько короче и проще для проверки вхождения корней в ОДЗ. Используя формулу (17), запишем уравнение в виде

$$\frac{1 + \cos 4x}{2} = \cos^2 4x.$$

Введем новую переменную $y = \cos 4x$. Это приводит к уравнению

$$2y^2 - y - 1 = 0.$$

с корнями $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, что даёт два уравнения: $\cos 4x = 1$, $4x = 2\pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$ (совпадает с уже найденной серией корней) и $\cos 4x = -\frac{1}{2}$, $4x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

Очевидно, что все эти корни входят в ОДЗ.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Задача 9. *Решить уравнение*

$$\sin^5 x \cos x - \sin x \cos^5 x = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Решение: Разложим левую часть уравнения на множители, вынося общие множители и используя формулу разности квадратов:

$$\sin x \cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Используя основное тригонометрическое тождество и формулы синуса и косинуса двойного угла, запишем уравнение в виде

$$-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Вновь используя формулу синуса удвоенного угла, получим уравнение

$$-\frac{1}{4}\sin 4x=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Таким образом,

$$\sin 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$4x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n.$$

Ответ: $x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение

$$\cos 4x+\cos 6x=\cos 5x.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 2x.$$

3. Решить уравнение

$$(\sin 7x+\cos 7x)^2=2\sin 14x.$$

4. Решить уравнение

$$(\sin x-\cos x)^4+\cos 4x=3.$$

5. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin 2x=0.$$

6. Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 5\sin 2x.$$

7. Решить уравнение

$$16\cdot(\sin^6 x + \cos^6 x) = 24\cdot(\sin x - \cos x)^2 + 1.$$

Занятие № 11

Решение систем тригонометрических уравнений и тригонометрических неравенств. Обратные тригонометрические функции

Методы решения систем тригонометрических уравнений сочетают в себе приёмы, характерные для решения систем любого типа, и технику решения тригонометрических уравнений.

Задача 1. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = 3 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Решение: Выразим из второго уравнения y через x: $y = \frac{\pi}{2} - x$ и подставим это выражение в первое уравнение. Поскольку по формулам приведения $\sin y = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, первое уравнение запишется в виде

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = 3.$$

Следовательно, $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$ и $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3 - \pi n$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$ и $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3 - \pi n,\ n \in Z.$

Задача 2. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Решение: Преобразуем первое уравнение:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 2.$$

Применяя для числителя формулу синуса суммы и подставляя значение знаменателя из второго уравнения, получим уравнение

$$\sin(x + y) = 1,$$

из которого следует, что $x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, т.е. $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - x$.

Подставляя это значение во второе уравнение и используя то, что

$$\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

запишем его в виде

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2},$$

т.е. $\sin 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, x = \frac{\pi}{4} + \pi m$ (заметим, что значение m не обязано совпадать с n). Следовательно,

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \frac{\pi}{4} - \pi m = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot (2n - m).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi m, y = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot (2n - m),\ \ n, m \in Z.$

Решение тригонометрических неравенств по сравнению с другими типами неравенств существенно осложняется тем, что решения тригонометрических уравнений состоят, как правило, из бесконечных серий корней и поэтому лобовое применение метода интервалов потребовало бы определения знака функции в бесконечном количестве интервалов. Выручает периодичность тригонометрических функций, благодаря которой достаточно решить неравенство на отрезке длиной в период, а затем перенести полученный ответ на бесконечное число интервалов по периодичности.

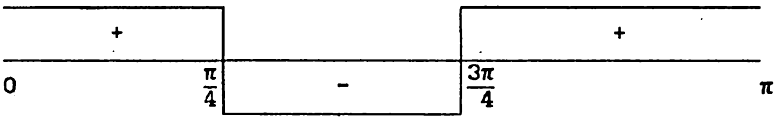
Задача 3. *Решить неравенство*

$$\cos^2 x > \frac{1}{2}.$$

Решение: Используя выражение $\cos^2 x$ через $\cos 2x$, перепишем неравенство в виде

$$\frac{1+\cos 2x}{2} > \frac{1}{2},$$

т.е. $\cos 2x > 0$. Функция $\cos 2x$ периодична с периодом π, поэтому достаточно рассмотреть решение неравенства на любом отрезке длины π, например, на отрезке $[0,\pi]$. Уравнение $\cos 2x = 0$ имеет решение $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, причём отрезку $[0,\pi]$ принадлежат два корня: $x = \frac{\pi}{4}$ (при $n = 0$) и $x = \frac{3\pi}{4}$ (при $n = 1$). Метод интервалов дает следующий результат:



Таким образом, решение неравенства на отрезке $[0,\pi]$ имеет вид $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ или $\frac{3\pi}{4} < x \leqslant \pi$. Прибавляя по πn к крайним частям каждого из неравенств, получим решение для всей числовой оси:

$$\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ или } \frac{3\pi}{4} + \pi n < x \leqslant \pi + \pi n.$$

Формально правильное, это решение записано в неэкономном виде. Легко заметить, что каждый левый промежуток из выписанных соединяется с правым промежутком из предыдущего отрезка длиной в период. Если взять их объединение, получим вместо двух одну серию интервалов: $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$. Заметим, что этот результат получился бы сразу, если бы в качестве отрезка длиной в период был выбран отрезок $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Задача 4. *Решить неравенство*

$$\cos 2x + \sin x \leqslant 0.$$

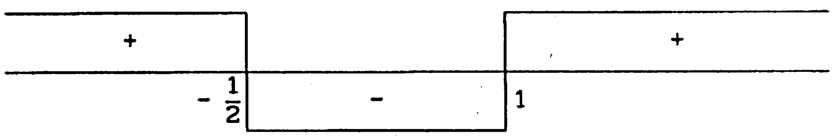
Решение: Начнём преобразования, исходя из тех же соображений, как и при решении соответствующего тригонометрического уравнения. Применим формулу (14) для выражения $\cos 2x$ через $\sin x$. Получим неравенство

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x \leqslant 0.$$

Введём новую неизвестную $y = \sin x$. Получим неравенство

$$2y^2 - y - 1 \geqslant 0.$$

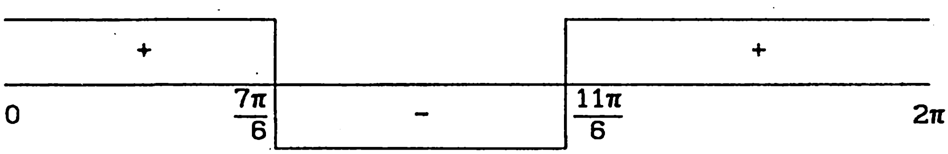
Корни соответствующего уравнения равны $y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{2}$. Решение получаем по методу интервалов:



Следовательно, $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$ или $\sin x \geqslant 1$. Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$ при всех значениях x, неравенство $\sin x \geqslant 1$ эквивалентно равенству $\sin x = 1$, что даёт значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Для решения неравенства $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$ используем , что период синуса равен 2π, так что решение можно искать на отрезке $[0,2\pi]$ длины 2π. Уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$ имеет корни

$$x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

На отрезке $[0,2\pi]$ лежит два корня из этой серии: $x = \frac{7\pi}{6}$ при $n = 1$ и $x = \frac{11\pi}{6}$ при $n = 2$. Применяя метод интервалов, находим



т.е. $\frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}$. Учитывая, что период равен 2π, получаем окончательно решение неравенства $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$

$$\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi n.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Определение 1. *Арксинусом числа x называется такое число* $y = \arcsin x$, *лежащее на отрезке* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *что* $\sin y = x$.

Из определения немедленно следует, что $\arcsin x$ определен только при $|x| \leqslant 1$, является нечётной функцией и $\sin(\arcsin x) = x$. Двойственное равенство $\arcsin(\sin x) = x$ верно только при дополнительном условии $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$. На этом свойстве основано решение некоторых задач, связанных с обратными тригонометрическими функциями.

Задача 5. *Найти* $\arcsin(\sin 10)$.

Решение: Если обозначить $y = \arcsin(\sin 10)$, то по определению $\sin y = \sin 10$. Следовательно, необходимо найти такое число y из отрезка $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, для которого $\sin y = \sin 10$. Для начала определим, в какой четверти находится угол в 10 радиан. Поскольку $3\pi < 10 < \frac{7\pi}{2}$, 10 — в III четверти и $10 = 3\pi + (10 - 3\pi)$, где $0 < 10 - 3\pi < \frac{\pi}{2}$. По формулам приведения

$$\sin 10 = \sin(3\pi + (10 - 3\pi)) = -\sin(10 - 3\pi).$$

Таким образом,

$$\sin y = -\sin(10 - 3\pi) = \sin(3\pi - 10), \text{ где } -\frac{\pi}{2} < 3\pi - 10 < 0.$$

Следовательно,

$$y = \arcsin(\sin y) = \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10.$$

Ответ: $3\pi - 10$.

Определение и использование функций $\arccos x$ и $\operatorname{arctg} x$ аналогично.

Определение 2. *Арккосинусом числа x называется такое число* $y = \arccos x$, *лежащее на отрезке* $[0,\pi]$, *что* $\cos y = x$.

Определение 3. *Арктангенсом числа x называется такое число* $y = \operatorname{arctg} x$, *лежащее в интервале* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *что* $\operatorname{tg} y = x$.

Задача 6. *Найти* $\cos(\operatorname{arctg}(-2))$.

Решение: Обозначим $y = \operatorname{arctg}(-2)$. Тогда по определению арктангенса $\operatorname{tg} y = -2$ и $-\frac{\pi}{2} < y < 0$. По формуле (4) $\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{5}$, т.е. $\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Знак "+" перед корнем выбран из-за того, что косинус положителен в четвертой четверти.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Задача 7. *Доказать тождество*

$$2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 3.$$

Решение: Поскольку $0 < \frac{1}{2} < 1$,

$$\operatorname{arctg} 0 = 0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

аналогично $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ и, следовательно, $0 < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{3\pi}{4}$. Кроме того, $0 < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$, т.е. значения и левой и правой частей тождества принадлежат интервалу $(0,\pi)$, на котором тангенс принимает каждое значение в единственной точке. Поэтому два числа из этого интервала совпадают тогда и только тогда, когда равны их тангенсы. Вычислим тангенс левой части, пользуясь формулами тангенса суммы и тангенса двойного угла и обозначив для сокращения выкладок $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ и $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, так что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$. Получаем, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}=3=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)\ .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=\sqrt{2}\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=6\\ x+y=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x>1.$$

4. Решить неравенство

$$\sin^2 x+\sin 2x\geqslant\cos^2 x.$$

5. Определить

$$\sin(\operatorname{arctg}(-2)).$$

6. Доказать тождество

$$2\arcsin\frac{2}{7}=\arccos\frac{41}{49}\ .$$

7. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{4}\ .$$

Занятие № 12

Решение задач на исследование зависимости функций от параметров

Задачи на исследование зависимости функций от параметров представляют из себя специфический класс разнообразных задач (в том числе, и достаточно сложных), для решения которых требуются не только хорошие навыки в решении уравнений и неравенств, но и знание свойств функций, а главное — умение логически мыслить.

Задачи на исследование могут иметь разнообразную тематику, опираясь, в частности, на свойства квадратного трёхчлена (наличие двух корней при положительном дискриминанте; отсутствие вещественных корней при отрицательном дискриминанте), понятие области определения и множества значений функции.

Задача 1. *При каких значениях параметра p уравнение*

$$(p-1)\cdot x^2+4x-2=0$$

имеет единственное решение?

Решение: Квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. Получаем уравнение

$$D=4^2-4(p-1)\cdot(-2)=8p+8=0,$$

имеющее корень $p=-1$. Однако, это лишь одно решение задачи. Дело в том, что не при всех значениях параметра p уравнение является квадратным ! Приравнивая к нулю коэффициент при x^2, получаем, что при $p=1$ уравнение становится линейным и имеет также единственное решение.

Ответ: При $p = -1$ или $p = 1$.

Задача 2. *При каких значениях параметра а неравенство*

$$\frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

выполняется для всех значений x?

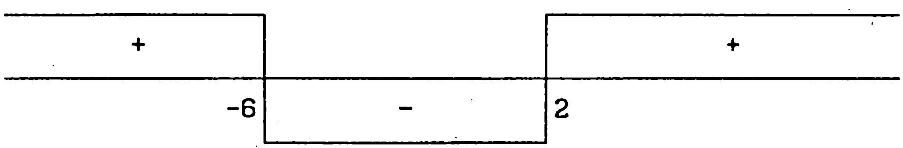
Решение: Используем обычную технику решения неравенств, не обращая пока внимания на параметр a. Приведя к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{x^2 - (a + 2)\,x + 4}{x^2 - x + 1} > 0.$$

Квадратный трёхчлен в знаменателе имеет отрицательный дискриминант -3, и поскольку коэффициент при x^2 положителен, это означает, что знаменатель положителен при любом значении x. Для того, чтобы числитель также был положителен при всех значениях x, с учётом того, что коэффициент при x^2 больше нуля, необходимо и достаточно, чтобы он не обращался в ноль, т. е. дискриминант был отрицательным. Получим неравенство

$$D = (a + 2)^2 - 4 \cdot 4 = a^2 + 4a - 12 < 0.$$

Корни соответствующего уравнения равны $a_1 = -6$, $a_2 = 2$, решая по методу интервалов, получаем



Ответ: При $-6 < a < 2$.

Задача 3. *При каких значениях параметра k выражение*

$$\sqrt{(k - 2)\,x^2 + 2kx + 2k + 3}$$

определено для любых x?

Решение: Поскольку квадратный корень можно извлекать только из неотрицательных чисел, требуется определить, при каких значениях параметра k неравенство

$$(k - 2)\,x^2 + 2kx + 2k + 3 \geqslant 0$$

выполняется для любых k.

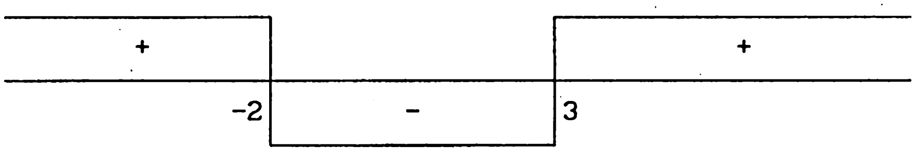
Для того, чтобы квадратный трёхчлен принимал только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: коэффициент при x^2 был положителен, а дискриминант D (или эквивалентно — величина $\frac{D}{4}$) — неположителен (равенство нулю, т.е. наличие единственного вещественного корня у квадратного трёхчлена, допускается). Получаем систему неравенств

$$\begin{cases} k - 2 > 0 \\ \frac{D}{4} = k^2 - (k - 2)\cdot(2k + 3) \leqslant 0 \end{cases}.$$

Первое неравенство имеет решение $k > 2$, второе приводится к виду

$$k^2 - k - 6 \geqslant 0.$$

Корни соответствующего уравнения равны -2 и 3, решение по методу интервалов даёт



т.е. $k \geqslant 3$ или $k \leqslant -2$. С учётом условия $k > 2$ получаем, что $k \geqslant 3$.

Ответ: При $k \geqslant 3$.

Задача 4. *При каких значениях параметра а корни уравнения*

$$x^2 - 4ax + (3a^2 - 4a - 4) = 0$$

по модулю меньше 3?

Решение: Начнём с вычисления корней квадратного трёхчлена. Поскольку

$$\frac{D}{4} = (-2a)^2 - (3a^2 - 4a - 4) = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2,$$

значения корней

$$x_1 = 2a + (a + 2) = 3a + 2, x_2 = 2a - (a + 2) = a - 2.$$

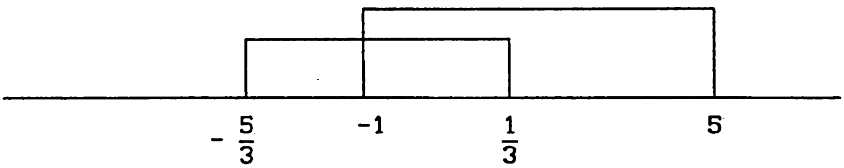
Записывая условие $|x| < 3$ в виде двойного неравенства $-3 < x < 3$, получаем систему из двух двойных неравенств:

$$\begin{cases} -3 < 3a + 2 < 3 \\ -3 < a - 2 < 3 \end{cases}$$

После элементарных преобразований получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -\frac{5}{3} < a < \frac{1}{3} \\ -1 < a < 5 \end{cases}$$

Решая эту систему по методу интервалов, получаем



Таким образом, решением системы является интервал $-1 < a < \frac{1}{3}$.

Ответ: При $-1 < a < \frac{1}{3}$.

Задача 5. *При каких значениях параметра m уравнения*

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0 \text{ и } 4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$$

имеют общий корень?

Решение: Некоторый подвох содержится в условии задачи. Если при некотором значении параметра m_1 оба уравнения имеют корень x_1, то пара (x_1, m_1) является решением системы, составленной из этих двух уравнений. Так что требуется просто найти решение системы уравнений.

Для того, чтобы это сделать, составим уравнение, в котором отсутствует свободный член, умножив с этой целью первое уравнение на (-3) и прибавив второе уравнение. Получим уравнение

$$-2x^2 + 8x = 0,$$

имеющее корни $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Первое значение, очевидно, не может входить в решение системы (первое уравнение приобретает вид $12 = 0$). Подставляя значение $x = 4$ в первое уравнение, получаем, что $32 - 4(3m + 2) + 12 = 0$, т.е. $-12m + 36 = 0$ и $m = 3$. Подставляя значения $x = 4$ и $m = 3$ во второе уравнение, получаем, что оно превращается в верное тождество. Так что общий корень $x = 4$ существует при $m = 3$.

Ответ: При $m = 3$.

Задача 6. *При каких значениях параметра k уравнение*

$$x + 2k\sqrt{x+1} - k + 3 = 0$$

имеет решение?

Решение: Решать это уравнение как иррациональное, используя метод возведения в квадрат обеих частей уравнения, нерационально, поскольку проследить за эквивалентностью преобразований в этом случае было бы достаточно сложно. Гораздо более простое решение получится, если взять $\sqrt{x+1}$ за новое неизвестное y. Тогда $x = y^2 - 1$ и уравнение приобретает вид

$$y^2 + 2ky - k + 2 = 0.$$

Обычное условие неотрицательности дискриминанта имеет в данном случае вид $k^2 + k - 2 \geqslant 0$. Корни соответствующего квадратного уравнения равны $k_1 = 1$ и $k_2 = -2$, а решение по методу интервалов даёт условия $k \leqslant -2$ или $k \geqslant 1$.

Однако найденные интервалы ещё не дают правильного ответа, т.к. необходимо учесть, что уравнение для x имеет решение только тогда, когда хотя бы один из корней уравнения для y неотрицателен. Проще всего определить вначале, когда оба корня для y будут отрицательны. По теореме Виета в таком случае и коэффициент при y, т.е. k, и свободный член, т.е. $(-k + 2)$ положительны, что имеет место при $0 < k < 2$. Следовательно, хотя бы один из корней уравнения для y неотрицателен при $k \leqslant 0$ или $k \geqslant 2$. Объединяя это условие с условием существования корней, получаем окончательный ответ.

Ответ: При $k \leqslant -2$ или $k \geqslant 2$.

Задача 7. *При каких значениях параметра a уравнение*

$$4\cos x + \cos 2x = a$$

имеет решение?

Решение: Решаем уравнение, используя обычные методы решения тригонометрических уравнений. Выражая $\cos 2x$ через $\cos x$ по формуле (15), получаем уравнение

$$4\cos x + 2\cos^2 x - 1 = a.$$

Обозначим $y = \cos x$. Для новой неизвестной y получаем уравнение

$$2y^2 + 4y - (a + 1) = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения равен $8a + 24$. Следовательно, для того, чтобы это уравнение имело корни, необходимо выполнение условия $8a + 24 \geqslant 0$, т.е. $a \geqslant -3$. Однако, учитывая, что $|\cos x| \leqslant 1$ при всех значениях x, получаем, что хотя бы один из корней полученного квадратного уравнения должен удовлетворять условию $|y| \leqslant 1$. Учитывая, что эти корни имеют вид

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8a + 24}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2a + 6}}{2},$$

получаем, что должно быть выполнено по крайней мере одно из двойных неравенств

$$-1 \leqslant -1 + \frac{\sqrt{2a + 6}}{2} \leqslant 1$$

или

$$-1 \leqslant -1 - \frac{\sqrt{2a + 6}}{2} \leqslant 1.$$

Для решения первого из них прибавим ко всем частям неравенства по 1 и умножим на 2. Получим неравенство

$$0 \leqslant \sqrt{2a + 6} \leqslant 4.$$

Левая часть этого неравенства выполняется для всех значений a, при которых корень определён. Для решения неравенства $\sqrt{2a + 6} \leqslant 4$ возведём обе его части в квадрат (что является равносильной операцией, поскольку они неотрицательны в области допустимых значений). Получим неравенство $2a + 6 \leqslant 16$, т.е. $a \leqslant 5$. С учётом ОДЗ получаем, что a удовлетворяет неравенству $-3 \leqslant a \leqslant 5$.

Второе неравенство сводится к виду

$$0 \leqslant -\sqrt{2a + 6} \leqslant 4$$

и, следовательно, имеет единственное решение $a = -3$ (квадратный корень неотрицателен на всей области определения), которое входит в уже полученный промежуток.

Ответ: При $-3 \leqslant a \leqslant 5$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - 4x + \log_2 a = 0$$

вещественны?

2. При каких значениях m неравенство

$$\frac{x^2 - mx + m + 2}{x^2 + 2x + 3} < 2$$

выполняется для любых x?

3. При каких значениях p функция

$$\log_2 \log_2 (x^2 + px + p + 4)$$

определена для любых x?

4. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - (3a + 1)x + (2a^2 + 4a - 6) = 0$$

меньше (-1)?

5. При каких значениях n корни уравнения

$$x^2 + (6 - n)x - 2n + 8 = 0$$

лежат в интервале от (-3) до 2?

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^4 + 4x^2 + a - 1 = 0$$

имеет решение?

7. При каких значениях параметра k уравнение

$$\log_3 (x + 5) + \log_3 (x + 1) = \log_3 (x + k - 1)$$

имеет решение?

8. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$4\sqrt{x+1} = kx + 5$$

имеет единственное решение.

9. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$4^x + (2k+1)\cdot 2^{x+1} + 16k + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

10. Определить значения p, при которых уравнение

$$\cos^4 x - \cos 2x + 2p - 1 = 0$$

имеет решение.

11. При каких значениях a функция

$$\sin^2 2x + 6\sin 2x + a$$

положительна для любых значений x?

Занятие № 13

Геометрические задачи. Треугольники

Геометрические задачи на вступительных экзаменах в МАТИ (как, впрочем, и в большинстве ВУЗов) считаются самыми сложными. Их решение, помимо знания основных аксиом и теорем геометрии, требует ещё и умения правильно построить чертёж (отразив в нем все условия задачи, но не добавляя излишних), составить (исходя из геометрических свойств) и решить системы уравнений, правильно использовать тригонометрические функции — короче, объединяет в себе различные математические навыки. Кроме того, во многих случаях требуется еще найти правильную и далеко не всегда очевидную идею решения, осуществить дополнительные построения.

Важным моментом при этом является то, чтобы технические детали решения не заслоняли основной идеи, а такое возможно лишь в случае, когда техника решения развита достаточно хорошо. Важнейшим элементом этой техники решения геометрических задач является работа с треугольниками, поскольку остальные многоугольники можно разбить на треугольники, сводя тем самым задачу к более простой.

Из всех видов треугольников наиболее удобным для решения является прямоугольный, что связано с соотношениями (считается, что угол C — прямой, а стороны a, b, c расположены, соответственно, против углов A, B, C):

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ (теорема Пифагора)},$$

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$$

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}.$$

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике катет, расположенный против угла в* 30°, *равен* 4. *Найти длины сторон треугольника.*

Решение: Пусть $\widehat{CAB} = 30^\circ$ и $|BC| = 4$ (рис. 1.).

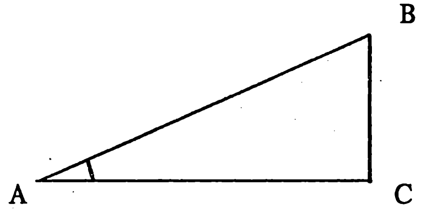


Рис. 1.

Тогда $\dfrac{|BC|}{|AB|} = \sin\widehat{CAB} = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, т.е. $|AB| = 2\cdot|BC| = 8$. По теореме Пифагора $|AC| = \sqrt{|AB|^2 - |BC|^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: 4, $4\sqrt{3}$ и 8.

В связи с удобством работы с прямоугольными треугольниками, во многих случаях полезно провести в треугольнике высоту, чтобы получить прямоугольные треугольники. Особенно часто это делается для равнобедренных треугольников, в которых высота, проведённая из вершины, разбивает треугольник на два равных прямоугольных треугольника.

Задача 2. *В равнобедренном треугольнике с основанием* 10 см *и боковой стороной* 13 см *найти длину высоты, проведённой к основанию.*

Решение: Пусть $|AB| = |BC| = 13$ и $|AC| = 10$ (рис. 2.).

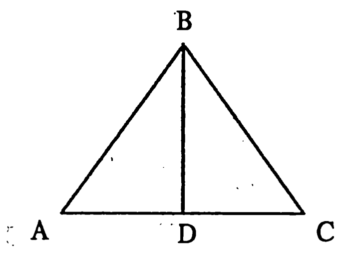


Рис. 2.

Проведём высоту BD. По свойствам равнобедренного треугольника она является медианой (и биссектрисой) треугольника, т.е. $|AD| = |DC| = 5$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику ABD, получаем:

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 - |AD|^2} = \sqrt{169 - 25} = 12.$$

Ответ: 12 см.

Полезно обратить внимание на то, что в рассмотренных задачах элементы треугольника определялись по трём независимым условиям (два угла и сторона в первой задаче, три стороны — во второй). Это правило является общим: треугольник практически однозначно определён, если в нём задано три независимых элемента (независимых — необходимое добавление: например, задание трёх углов не определяет треугольник, т.к. их сумма всегда равна 180°, т.е. каждый из трёх углов зависит от значения двух других).

Таким образом, не забывая, разумеется, о том, что универсального метода решения задач не существует, можно в качестве общей направляющей идеи предложить следующее соображение: использовать разбиение заданной фигуры на треугольники или осуществить дополнительные построения с тем, чтобы получить треугольник, в котором известно три элемента. Затем определить из этого треугольника нужные элементы и проверить, не получено ли при этом нового треугольника, в котором можно определить все необходимые элементы.

Если сразу же или на каком-то этапе решения оказывается, что треугольника с тремя известными элементами нет, удобно использовать второй основной приём: принять некоторый элемент за неизвестную и после этого решать треугольники, выражая их элементы через эту неизвестную пока величину с тем, чтобы в конце концов получить для некоторого элемента два различных выражения через введённую неизвестную, т.е. построить уравнение для определения этой неизвестной. В некоторых случаях введения одной неизвестной недостаточно, поэтому вводится вторая — но необходимость в большем числе неизвестных возникает уже совсем редко.

Рассмотрим несколько простых задач, реализующих этот подход.

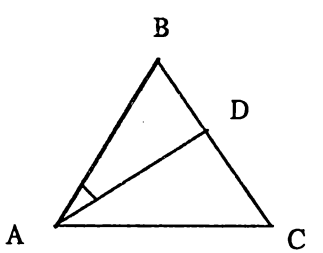


Рис. 3.

Задача 3. *В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к боковой стороне, равна h и образует угол α с другой боковой стороной. Найти длину основания.*

Решение: По условию $|AD| = h$, AD перпендикулярен BC и $B\hat{A}D = \alpha$ (рис 3). Сформулируем вначале идею решения. Поскольку в прямоугольном треугольнике ABD известны острый угол и один из катетов, в нём можно определить все элементы, в частности, длины $|AB|$ и $|BD|$. Поскольку треугольник ABC — равнобедренный и $|BC| = |AB|$ стала известной, то можно определить $|CD| = |BC| - |BD|$. После этого в прямоугольном треугольнике ADC известны катеты, следовательно, можно определить гипотенузу AC.

Остались элементарные выкладки. Используя тригонометрию, находим $|BD| = h\operatorname{tg}\alpha$ и $|AB| = \dfrac{h}{\cos\alpha}$. Следовательно,

$$|CD| = \frac{h}{\cos\alpha} - h\operatorname{tg}\alpha = \frac{h(1-\sin\alpha)}{\cos\alpha},$$

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{h^2 + \frac{h^2(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{h}{\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{h}{\cos\alpha}\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$$

Ответ: $\dfrac{h}{\cos\alpha}\sqrt{2(1-\sin\alpha)}$.

Задача 4. *Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с площадями* 4 см^2 *и* 16 см^2. *Найти длину гипотенузы.*

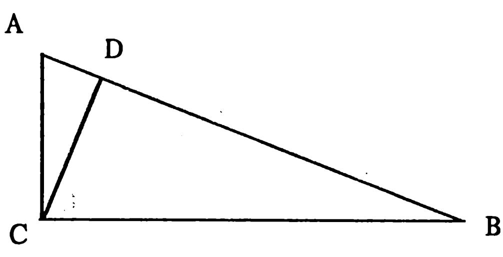


Рис. 4.

Решение: Пусть AB — гипотенуза, а CD — высота прямоугольного треугольника ABC (рис.4). По условию площади треугольников ACD и BCD равны соответственно 4 см^2 и 16 см^2. В данной задаче нет треугольников, в которых было бы известно по три элемента, поэтому самый естественный путь решения — ввести неизвестные, причём, поскольку треугольники ABC и BCD равноправны, естественно ввести две неизвестные. Обозначим $|AC|$ через x, а $|BC|$ — через y. Тогда площадь треугольника ABC, равная сумме площадей треугольников ACD и BCD, равна $\frac{xy}{2}$, что даёт первое из уравнений:

$$\frac{xy}{2} = 20.$$

Углы ACD и CBD равны как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, прямоугольные треугольники ACD и CBD подобны (по двум равным углам). Площади подобных фигур относятся как квадраты соответствующих сторон, поэтому

$$\frac{16}{4} = \frac{y^2}{x^2},$$

что даёт второе уравнение для определения неизвестных. Из этого уравнения находим, что $y^2 = 4x^2$, т.е. $y = 2x$ (учитываем, что $x > 0$, $y > 0$). Подставляя в первое уравнение, получаем, что $x^2 = 20$, т.е. $x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Тогда $y = 4\sqrt{5}$ и по теореме Пифагора

$$|AB| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{20 + 80} = 10.$$

Ответ: 10 см.

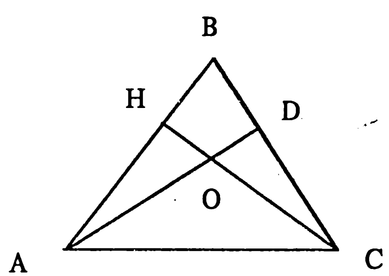


Рис. 5.

В рассмотренной задаче проявилось характерное свойство, которое часто бывает полезным при решении задач, в которых фигурирует высота треугольника: в них часто оказываются полезными соображения подобия. Пусть, например, в треугольнике ABC проведены высоты AD и CH (рис. 5).

Тогда как прямоугольные с равными острыми углами подобны треугольники ABD, AOH, COD и BCH. Наличие сразу четырёх подобных треугольников может очень существенно облегчить решение задачи.

Аналогично характерные свойства имеются для двух других типов линий в треугольнике. Для медиан таким свойством является

Теорема 1. *Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении* 2:1, *считая от вершины.*

Таким образом, если в треугольнике ABC проведены медианы AK, BM и CN (рис. 6.), то

$$|AO|:|OK| = |BO|:|OM| = |CO|:|ON| = 2:1$$

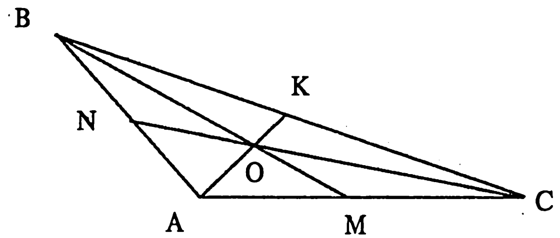


Рис. 6.

На использовании этого свойства основано, в частности, решение следующей задачи.

Задача 5. *Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника удалена от катетов на расстояния, соответственно,* 3 см *и* 4 см. *Найти расстояние от этой точки до гипотенузы.*

Решение: По условиям задачи AK, BM и CN — медианы, OD перпендикулярен BC, OE перпендикулярен AC, $|OE| = 3$ см, $|OD| = 4$ см (рис. 7). Тогда треугольники AOE и AKC подобны как прямоугольные с равными острыми углами, поэтому $|KC|:|OE| = |AK|:|AO|$. Поскольку по теореме 1 $|AO| = 2\cdot|OK|$, $|AK| = 3\cdot|OK|$, то $|KC|:3 = 3:2$, откуда следует, что $|KC| = 4{,}5$ см, $|BC| = 2\cdot|KC|$ (AK — медиана), т.е. $|BC| = 9$ см. Аналогично находим, что $|AC| = 12$ см.

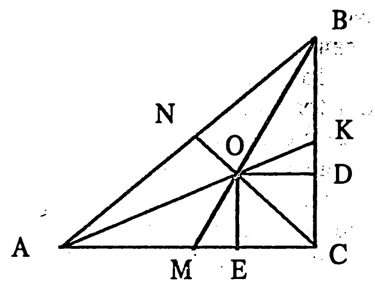


Рис. 7.

Эта часть решения очевидна и может быть сделана сразу же без особых размышлений. Теперь в треугольнике ABC известны три элемента (две стороны и прямой угол), поэтому в соответствии с общим принципом в нём можно определить любой элемент, в частности, по теореме Пифагора сразу же находим, что $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = 15$ см. Однако, дальнейшее не столь очевидно. Можно пойти лобовым путём и, исходя из того, что требуется найти высоту треугольника ABO, вычислить вначале длины сторон этого треугольника, вычислив по теореме Пифагора длины медиан AK и BM и воспользовавшись теоремой 1, а затем применить стандартный метод определения высоты треугольника с известными сторонами (он будет рассмотрен в следующей задаче). Такой подход требует значительных вычислений.

Гораздо быстрее получится результат, если использовать соображения подобия. Для этого проведём дополнительно высоту CH треугольника ABC. Полезно нарисовать ещё один чертёж (рис.8), чтобы не загромождать первый излишним количеством линий.

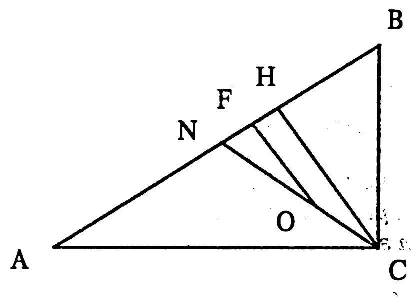


Рис. 8.

Треугольники CNH и ONF подобны как прямоугольные с равным острым углом и из теоремы 1 следует, что $|ON| = \frac{1}{3}|CN|$. Поэтому $|OF| = \frac{1}{3}|CH|$, а длину высоты в прямоугольном треугольнике можно определить, воспользовавшись двумя выражениями для площади:

$$S_{ABC}=\frac{|AB|\cdot|CH|}{2}=\frac{|AC|\cdot|BC|}{2}=\frac{9\cdot 12}{2}=54.$$

Следовательно,

$$|CH|=\frac{2S_{ABC}}{|AB|}=\frac{2\cdot 54}{15}=7,2$$

и $|OF|=\frac{1}{3}|CH|=2,4$

Ответ: 2,4 см.

Для биссектрис важнейшим свойством, помимо определения, является утверждение следующей теоремы:

Теорема 2. *Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные сторонам угла, в котором она проведена.*

Таким образом, если AD — биссектриса треугольника ABC, то $|BD|:|CD|=|AB|:|AC|$ (рис. 9).

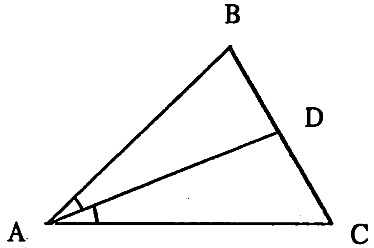


Рис. 9.

Задача 6. *В треугольнике со сторонами* 13 см, 14 см *и* 15 см *определить площадь треугольника, заключённого между высотой и биссектрисой, проведёнными к средней по длине стороне.*

Решение: По условию $|AB|=15$ см, $|BC|=13$ см и $|AC|=14$ см, BH — высота, а BD — биссектриса (рис.10) . Для того, чтобы найти площадь треугольника BDH, учитывая, что он прямоугольный, достаточно определить длины BH и DH. Для

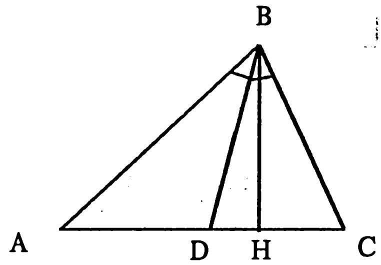


Рис. 10.

определения BH можно по формуле Герона найти площадь треугольника ABC, а затем воспользоваться равенством $S_{ABC} = \dfrac{|AC| \cdot |BH|}{2}$, а можно воспользоваться следующим стандартным приёмом. Обозначим $|BH| = x$. Тогда по теореме Пифагора

$$|AH| = \sqrt{|AB|^2 - |BH|^2} = \sqrt{225 - x^2},$$

$$|CH| = \sqrt{|BC|^2 - |BH|^2} = \sqrt{169 - x^2}$$

и $|AH| + |CH| = |AC|$. Получаем уравнение

$$\sqrt{225 - x^2} + \sqrt{169 - x^2} = 14.$$

Перенесём второй из корней в правую часть и возведём обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение

$$225 - x^2 = 196 - 28\sqrt{169 - x^2} + 169 - x^2.$$

Перенося корень в левую часть, получаем после упрощений уравнение $\sqrt{169 - x^2} = 5$, т.е. $169 - x^2 = 25$, $x^2 = 144$, $x = 12$ (подходит, естественно, только положительный корень). Теперь по теореме Пифагора

$$|CH| = \sqrt{|BC|^2 - |BH|^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$$

Для определения DH определим вначале CD, воспользовавшись для этого теоремой 2. Пусть $|CD| = y$. Тогда $|AD| = 14 - y$ и по этой теореме $|AD| : |CD| = |AB| : |BC| = 15:13$. Получаем уравнение

$$\frac{14-y}{y}=\frac{15}{13},$$

т.е. $182-13y=15y$, $28y=182$ и $y=6{,}5$. Следовательно,

$$|DH|=|CD|-|CH|=6{,}5-5=1{,}5,$$

$$S_{BDH}=\frac{|BH|\cdot|DH|}{2}=\frac{12\cdot 1{,}5}{2}=9.$$

Ответ: 9 см^2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 7 см, а медиана, проведённая к боковой стороне, — $\frac{\sqrt{22}}{2}$ см. Найти стороны треугольника.

2. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника равна 10 см и делит боковую сторону в отношении 2:1. Найти стороны треугольника.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами $p=16$ см и $q=18$ см. Найти длины сторон треугольника.

4. Две стороны треугольника равны 6 см и 8 см. Медианы, проведённые к этим сторонам, перпендикулярны. Найти площадь треугольника.

5. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 5 см и 7 см, а медиана третьей стороны равна $2\sqrt{7}$ см.

Занятие № 14

Использование тригонометрии при решении геометрических задач. Четырёхугольники

Основой применения тригонометрии при решении геометрических задач являются соотношения между сторонами прямоугольного треугольника и следующие две теоремы, в каждой из которых a, b, c — длины сторон треугольника, а α, β, γ — величины противолежащих этим сторонам углов.

Теорема косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,\mathrm{R},$$

где R — радиус описанной окружности.

Еще одним полезным применением тригонометрических функций является один из вариантов формулы площади треугольника:

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Задача 1. *Основание треугольника равно* $2\sqrt{7}$ см, *а медианы, проведённые к боковым сторонам,* — 3 см *и* 6 см. *Найти боковые стороны треугольника.*

Решение: Пусть $|AC| = 2\sqrt{7}$ см, AD, CE — медианы, $|AD| = 3$ см, $|CE| = 6$ см (рис. 1).

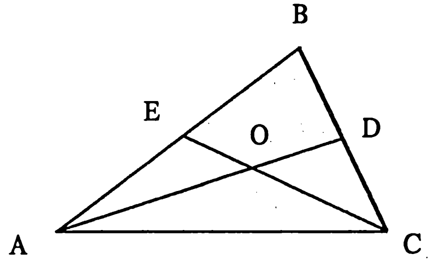


Рис. 1.

Наметим вначале путь решения. Поскольку известны длины двух медиан, можно воспользоваться теоремой 1 предыдущего занятия и определить $|AO|$, $|OD|$, $|CO|$ и $|OE|$. Тогда в треугольнике AOC станут известны длины трёх сторон, а поэтому в нём можно будет определить величину угла AOC. Тем самым станет известен угол AOE, т.е. три элемента будут определены в треугольнике AOE, из которого можно будет найти $|AE|$ — половину стороны AB.

Непосредственные вычисления связаны с использованием теоремы косинусов. Используя свойства медиан, определим вначале

$$|AO| = \frac{2}{3}|AD| = 2, \quad |CO| = \frac{2}{3}|CE| = 4.$$

Применяя теорему косинусов для треугольника AOC и обозначив угол AOC через α, получаем, что

$$\cos\alpha = \frac{|AO|^2 + |CO|^2 - |AC|^2}{2|AO|\,|CO|} = \frac{4 + 16 - 28}{2 \cdot 2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}.$$

По формулам приведения $\cos \widehat{AOE} = \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$. Применяя теорему косинусов к треугольнику AOE и учитывая, что по свойствам медиан $|OE| = \frac{1}{3}|CE| = 2$, получаем, что

$$|AE|^2 = |AO|^2 + |OE|^2 - 2|AO|\,|OE| \cdot \frac{1}{2} = 4 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4,$$

т.е. $|AE| = 2$. Следовательно, $|AB| = 2|AE| = 4$. Аналогично определяем, что $|CB| = 2\sqrt{13}$.

Ответ: 4 см и $2\sqrt{13}$ см.

Задача 2. *Длина гипотенузы прямоугольного треугольника относится к длине биссектрисы острого угла как* $\sqrt{3}:1$. *Определить углы треугольника.*

Решение: По условию $|AB| : |AD| = \sqrt{3}:1$, где AD — биссектриса (рис.2). По-

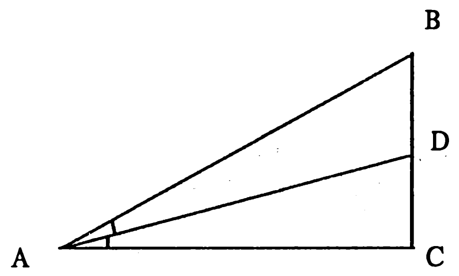


Рис. 2.

скольку в этой задаче не задана длина никакого отрезка, за единицу можно взять длину любого отрезка. Пусть $|AD| = 1$. Тогда по условию $|AB| = \sqrt{3}$. Обозначим через α величину угла $\widehat{BAD}$. Тогда $\widehat{DAC} = \alpha$ и поскольку $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} = 90°$, то $\widehat{ABD} = 90° - 2\alpha$, а $\widehat{BDA} = 180° - \widehat{BAD} - \widehat{ABD} = 90° + \alpha$. По теореме синусов

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{1}{\sin(90° - 2\alpha)}.$$

Используем то, что по формулам приведения $\sin(90° - 2\alpha) = \cos 2\alpha$ и $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$. Решение задачи сводится к решению тригонометрического уравнения $\sqrt{3}\cos 2\alpha = \cos\alpha$. Выражая $\cos 2\alpha$ через $\cos\alpha$, получаем уравнение

$$2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0.$$

Обозначив $y = \cos\alpha$, получаем для y квадратное уравнение $2\sqrt{3}\,y^2 - y - \sqrt{3} = 0$, имеющее корни $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Второй из них не имеет геометрического смысла, т.к. α — острый угол. Поэтому $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\alpha = 30°$. Следовательно, $B\hat{A}C = 60°$ и $A\hat{B}C = 30°$.

Ответ: $60°$ и $30°$.

Задача 3. *Определить площадь треугольника, если две его стороны равны* 35 см *и* 14 см, *а биссектриса угла между ними содержит* 12 см.

Решение: По условию $|AB| = 35$, $|AC| = 14$ и $|AD| = 12$, где AD — биссектриса угла BAC (рис.3).

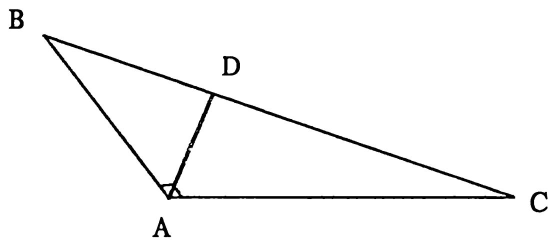


Рис. 3.

Поскольку треугольников, из которых можно было бы непосредственно определить новые элементы, нет, необходимо выбрать неизвестную. Удобнее всего обозначить через x величину углов $B\hat{A}D = D\hat{A}C$. Тогда по теореме косинусов немедленно получаем выражения через x длин BD и CD:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB|\cdot|AD|\cdot\cos x =$$

$$= 35^2 + 12^2 - 2\cdot35\cdot12\cos x = 1369 - 840\cos x,$$

$$|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2|AC|\cdot|AD|\cdot\cos x =$$

$$= 14^2 + 12^2 - 2\cdot14\cdot12\cos x = 340 - 336\cos x.$$

Учитывая, что биссектриса разбивает сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные сторонам угла, получаем, что

$$\frac{|BD|^2}{|CD|^2}=\frac{1369-840\cos x}{340-336\cos x}=\frac{|AB|^2}{|AC|^2}=\frac{1225}{196}.$$

Получено простейшее уравнение, из которого можно найти $\cos x$. Тем не менее большие значения коэффициентов приводят к тому, что вычисления оказываются достаточно сложными, что увеличивает вероятность арифметической ошибки. Для того, чтобы упростить вычисления, оставим для $|BD|^2$ и $|CD|^2$ выражения до приведения подобных членов. Избавляясь от знаменателя, получим уравнение

$$35^2\cdot14^2+12^2\cdot14^2-2\cdot35\cdot12\cdot14^2\cos x=$$

$$=14^2\cdot35^2+12^2\cdot35^2-2\cdot14\cdot12\cdot35^2\cos x.$$

Следовательно, $2\cdot12\cdot14\cdot35\cdot(35-14)\cdot\cos x=12^2\cdot(35^2-14^2)$. Сокращая и используя формулу разности квадратов, получим, что $2\cdot14\cdot35\cdot\cos x=12\cdot49$, т.е. $\cos x=\frac{3}{5}$. Для вычисления площади удобнее всего воспользоваться формулой

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

В данном случае $b=|AC|=14$, $c=|AB|=35$ и

$$\sin\alpha=\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$$

(для вычисления $\sin x$ использовано основное тригонометрическое тождество). Таким образом,

$$S=\frac{1}{2}\cdot35\cdot14\cdot\frac{24}{25}=235{,}2.$$

Ответ: 235,2.

Заметим, что метод алгебраических преобразований арифметических выражений достаточно полезен в тех случаях, когда появляются сложные арифметические выражения, и не только позволяет обойтись без калькулятора, но иногда оказывается даже проще.

Основным методом решения задач, в которых фигурируют многоугольники (чаще всего — четырёхугольники), является разбиение многоугольника на треугольники для того, чтобы можно было использовать обычную технику решения треугольников.

Задача 4. *В ромб со стороной* 8 см *и острым углом* 60° *вписан прямоугольник с периметром* 24 см *так, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям ромба. Найти стороны прямоугольника.*

Решение: По условию ABCD — ромб, $|AB| = 8$, $B\hat{A}D = 60^\circ$ (рис 4.). Поскольку

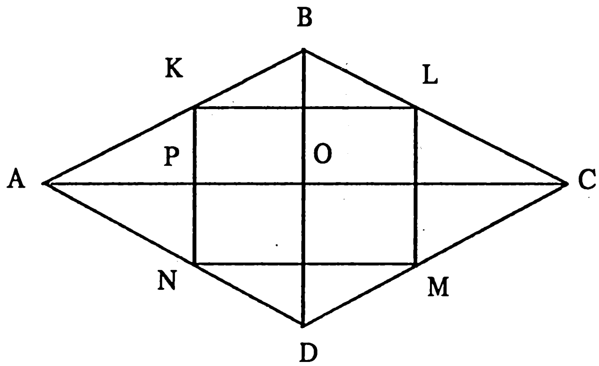


Рис. 4.

диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам, $A\hat{O}B = 90^\circ$ и $B\hat{A}O = \frac{1}{2} B\hat{A}D = 30^\circ$. Поэтому из прямоугольного треугольника ABO получаем, что $|AO| = |AB| \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$. Обозначим $|KN|$ через x. Тогда $|KP| = \frac{x}{2}$ и из прямоугольного треугольника AKP получаем, что $|AP| = |KP| \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $|PO| = |AO| - |AP| = 4\sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$ и $|KL| = 2|PO|$ (по соображениям симметрии) $= 8\sqrt{3} - x\sqrt{3}$. Периметр прямоугольника KLMN равен $2|KL| + 2|KN|$, что даёт уравнение

$$2x + 2\cdot(8\sqrt{3} - x\sqrt{3}) = 24.$$

Решая его, находим, что $x = 6 - 2\sqrt{3}$, и тогда $|KL| = 6 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $6 - 2\sqrt{3}$ и $6 + 2\sqrt{3}$.

Пожалуй, из всех четырёхугольников особенно разнообразные задачи связаны с трапециями.

Задача 5. *Основания трапеции равны* 16 см *и* 44 см, *а боковые стороны* — 17 см *и* 25 см. *Определить площадь трапеции.*

Решение: По условию $AD \parallel BC$, $|AD| = 44$, $|BC| = 16$, $|AB| = 17$, $|CD| = 25$ (рис. 5).

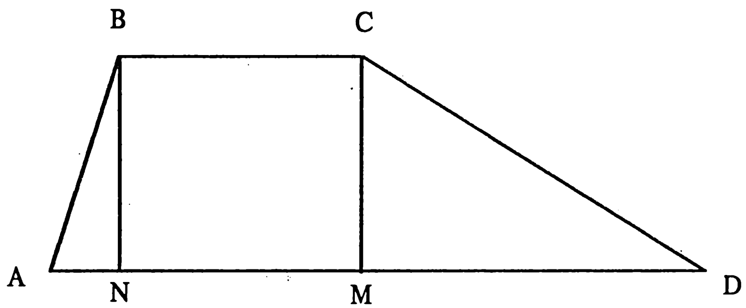


Рис. 5.

Поскольку площадь трапеции вычисляется по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b — длины оснований, а h — высота трапеции, для того, чтобы определить площадь, достаточно найти значение высоты. Опустим из вершин B и C перпендикуляры на основание AD (приём, который очень часто используется при решении задач, связанных с трапециями). Тогда BCMN — прямоугольник, поэтому $|NM| = 16$. Обозначим $x = |BN| = |CM|$. Из прямоугольных треугольников ABN и CDM по теореме Пифагора находим

$$|AN| = \sqrt{|AB|^2 - |BN|^2} = \sqrt{17^2 - x^2} = \sqrt{289 - x^2},$$

$$|MD| = \sqrt{|CD|^2 - |CM|^2} = \sqrt{25^2 - x^2} = \sqrt{625 - x^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство $|AD| = |AN| + |NM| + |MD|$, получаем уравнение

$$44 = \sqrt{289 - x^2} + 16 + \sqrt{625 - x^2}.$$

Уединяя последний корень в правой части, получаем уравнение

$$28 - \sqrt{289 - x^2} = \sqrt{625 - x^2}\ .$$

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим после приведения подобных членов и сокращения, что

$$\sqrt{289 - x^2} = 8.$$

Еще раз возводя в квадрат, находим, что $x = 15$. Подставляя найденное значение высоты в формулу площади трапеции, получаем, что

$$S = \frac{16 + 44}{2} \cdot 15 = 450\ .$$

Ответ: 450 см^2.

Задача 6. *В трапеции* ABCD *с основаниями* AD *и* BC *через вершину* A *проведена прямая, которая пересекает диагональ* BD *в точке* E *и боковую сторону* CD *в точке* K, *причём* $|BE| : |ED| = 1 : 2$ *и* $|CK| : |KD| = 1 : 4$. *Найти отношение длин оснований трапеции.*

Решение: То, что в условии не заданы длины каких-либо отрезков и требуется найти отношение длин, должно сразу же наводить на мысль, что ключевую роль в решении должны сыграть соображения подобия. Треугольника, в который входили бы оба основания, нет и попытка его построить (продолжая боковые стороны до их пересечения) явно уводит в сторону. Зато можно попытаться выразить оба основания через длину одного и того же отрезка, т.к. уже само наличие двух параллельных оснований облегчает построение подобных треугольников. Ясно, что этот вспомогательный отрезок должен быть параллелен основаниям. Проведём через точку E отрезок параллельно AD и BC до пересечения с CD в точке L (рис. 6). Тогда подобны треугольники AKD и EKL, а также треугольники BDC и EDL. При этом $|BC| : |EL| = |BD| : |ED| = 3 : 2$, т.е. $|BC| = \frac{3}{2}|EL|$.

По свойствам отрезков, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, $|CL| : |LD| = 1 : 2$, т.е. $|LD| = \frac{2}{3}|CD|$, в то время как $|KD| = \frac{4}{5}|CD|$. Следовательно, $|KL| = \frac{4}{5}|CD| - \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{15}|CD|$ и $|KL| : |KD| = \frac{2}{15} : \frac{4}{5} =$

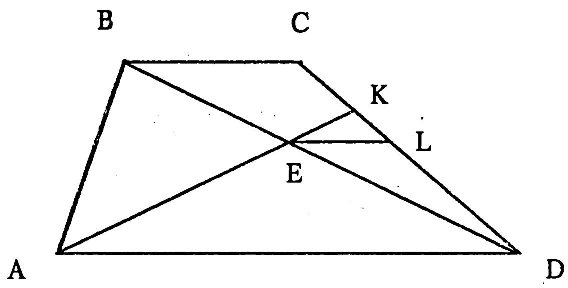


Рис. 6.

$= 1:6$. Из подобия треугольников AKD и EKL получаем, что $|EL| : |AD| = |KL| : |KD| = 1:6$, т.е. $|AD| = 6|EL|$. Окончательно имеем, что $|BC| : |AD| = \frac{3}{2}|EL| : 6|EL| = 1:4$.

Ответ: 1 : 4.

Задачи для самостоятельного решения

1. Медиана АД равнобедренного треугольника АВС равна 6 см, а угол АДС равен 30°. Найти стороны треугольника, если АС — его основание.

2. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника относится к длине биссектрисы прямого угла как $2\sqrt{3} : 1$. Определить углы треугольника.

3. В треугольнике со сторонами 4 см, 5 см и 6 см найти длину биссектрисы, проведённой к средней по длине стороне.

4. В треугольник с основанием 6 см и боковыми сторонами 5 см и 7 см вписан прямоугольник с отношением сторон 2:1, причём большая сторона прямоугольника лежит на основании треугольника. Найти стороны прямоугольника.

5. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найти все стороны трапеции, если её высота равна 12 см, а длины биссектрис 13 см и 15 см.

6. В трапеции ABCD с площадью 126 см^2 через вершину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке M и основание BC в точке N, причём $|BM| : |MD| = 1:6$ и $|BN| : |NC| = 1:2$. Найти площадь треугольника BNM.

Занятие № 15

Окружности

Определение 1. *Окружностью называется геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки, которая называется центром окружности.*

Основные факты, связанные с окружностями:

Определение 2. *Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью, называется касательной.*

Теорема 1. *Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.*

Определение 3. *Окружность называется вписанной в многоугольник, если она касается всех его сторон.*

Теорема 2. *В любой треугольник можно вписать окружность, причём только одну. Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.*

Теорема 3. *В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противолежащих сторон одинаковы.*

Определение 4. *Окружность называется описанной вокруг многоугольника, если все его вершины лежат на окружности.*

Теорема 4. *Вокруг любого треугольника можно описать окружность, причём только одну. Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.*

Теорема 5. *Вокруг четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов равна* $180°$.

Из перечисленных основных теорем легко вытекают простейшие свойства, которые существенно облегчают решение многих задач, связанных с окружностями:

— центры окружностей, вписанной в равнобедренный треугольник и описанной вокруг него, расположены на высоте, проведённой к основанию. Это утверждение можно обобщить следующим образом: если многоугольник обладает осью симметрии, то центры вписанной и описанной окружностей (разумеется, если они существуют) лежат на оси симметрии.

— центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.

— если вокруг трапеции можно описать окружность, то трапеция является равнобедренной.

Перечислим основные формулы, которые могут быть полезны при решении задач, связанных с окружностями. Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник, R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника, a, b, c — длины сторон треугольника, S — его площадь, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, α, β, γ — углы. Тогда

$$S = pr,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Если c — гипотенуза прямоугольного треугольника, то

$$R = \frac{c}{2},$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Задача 1. *В равнобедренный треугольник с основанием a вписана окружность радиуса r. Определить периметр треугольника.*

Решение: Пусть $|AB| = |BC|$ и $|AC| = a$ (рис.1). Обозначим через α величину угла BAC. Поскольку AO — биссектриса, угол OAC равен $\frac{\alpha}{2}$, и из прямоугольного треугольника OAD получаем, что

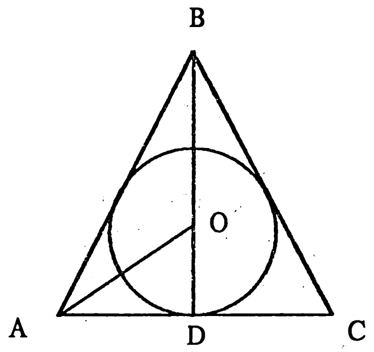


Рис. 1.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{2r}{a}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{4r}{a}}{1-\frac{4r^2}{a^2}} = \frac{4ar}{a^2-4r^2},$$

т.е.

$$|BD| = |AD|\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2}\cdot\frac{4ar}{a^2-4r^2} = \frac{2a^2r}{a^2-4r^2}.$$

Следовательно, площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}|AC|\,|BD| = \frac{1}{2}a\frac{2a^2r}{a^2-4r^2} = \frac{a^3r}{a^2-4r^2}.$$

С другой стороны $S = pr$. Поэтому периметр треугольника

$$P = 2p = \frac{2S}{r} = \frac{2a^3}{a^2 - 4r^2}.$$

Ответ: $\dfrac{2a^3}{a^2 - 4r^2}$.

Задача 2. *Радиус окружности, описанной вокруг остроугольного равнобедренного треугольника, относится к радиусу вписанной в этот треугольник окружности как* 8:3. *Найти углы треугольника.*

Решение: Выберем единицу длины так, чтобы радиус вписанной окружности r был равен 3. Тогда радиус описанной окружности R равен 8. Пусть AB и BC — боковые стороны треугольника и O — центр вписанной окружности (рис.1). Обозначим величину угла BAC через x. AO — биссектриса угла BAC, поэтому угол OAC равен $\frac{x}{2}$. Из прямоугольного треугольника AOD получаем, что

$$|AD| = |OD| \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 3\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

Следовательно,

$$|AC| = 2\,|AD| = 6\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

Поскольку сумма углов треугольника равна π,

$$A\widehat{B}C = \pi - B\widehat{A}C - B\widehat{C}A = \pi - 2x.$$

По теореме синусов получаем, что

$$\frac{|AC|}{\sin(\pi - 2x)} = \frac{6\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 2x} = 2R = 16$$

(использованы формулы приведения), т.е. для неизвестной x получаем уравнение

$$3\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 8\sin 2x.$$

Дважды используя формулу синуса удвоенного угла, получим уравнение

$$\frac{3\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 32\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x.$$

Сократим на $\cos\frac{x}{2}$ (очевидно, что решение уравнения $\cos\frac{x}{2} = 0$ не имеет геометрического смысла) и выразим $\sin^2\frac{x}{2}$ через $\cos x$. Получим уравнение

$$3 = 16(1 - \cos x)\cos x.$$

Обозначив $\cos x$ через y, получим квадратное уравнение

$$16y^2 - 16y + 3 = 0,$$

имеющее корни $y_1 = \frac{3}{4}$ и $y_2 = \frac{1}{4}$. Поскольку $\frac{3}{4} = \sqrt{\frac{9}{16}} > \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$, первому из этих корней соответствует значение $x < \frac{\pi}{4}$, но при этом $\widehat{ABC} > \pi - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, что противоречит тому, что треугольник — остроугольный. Следовательно, $\cos x = \frac{1}{4}$ и $x = \arccos\frac{1}{4}$. Для нахождения угла ABC воспользуемся тем, что

$$\cos\widehat{ABC} = \cos(\pi - 2x) = -\cos 2x = 1 - 2\cos^2 x = \frac{7}{8}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$, $\arccos\frac{1}{4}$, $\arccos\frac{7}{8}$.

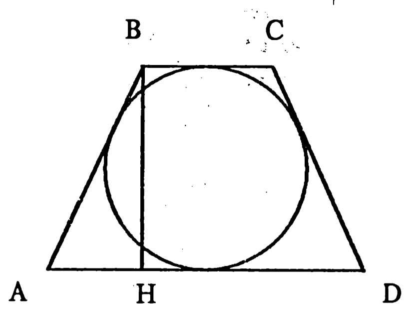


Рис. 2.

Задача 3. *Основания трапеции равны* 4 см *и* 16 см. *Найти её площадь, если известно, что в трапецию можно вписать окружность и вокруг неё можно описать окружность.*

Решение: По условию $AD \parallel BC$, $|AD| = 16$, $|BC| = 4$ (рис.2.).

Из того, что вокруг трапеции можно описать окружность, следует, что она равнобедренная, т.е. $|AB| = |CD|$. Из того, что в трапецию можно вписать окружность, следует, что $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$, т.е.

$$|AB| = \frac{|AD| + |BC|}{2} = 10.$$

Проведём высоту BH. Тогда из равнобедренности трапеции следует, что

$$|AH| = \frac{1}{2}\left(|AD| - |BC|\right) = 6$$

и по теореме Пифагора

$$|BH| = \sqrt{|AB|^2 - |AH|^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Следовательно, площадь трапеции равна

$$S = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |BH| = \frac{4 + 16}{2} \cdot 8 = 80.$$

Ответ: 80 см^2.

Задача 4. *В равнобедренной трапеции длины оснований равны* 2 см *и* 32 см, *а длины боковых сторон — по* 25 см. *Проведены две касающиеся друг друга окружности, каждая из которых касается одного из оснований и каждой из боковых сторон. Найти радиусы этих окружностей.*

Решение: По условию AD параллельно BC, $|AD| = 32$, $|BC| = 2$, $|AB| = |CD| = 25$ (рис.3).

Проведём общую касательную KE к окружностям, параллельную основаниям. Тогда по теореме 3

$$|AD| + |KE| = |AK| + |DE| = 2|AK|,$$

$$|BC| + |KE| = |BK| + |CE| = 2|BK|.$$

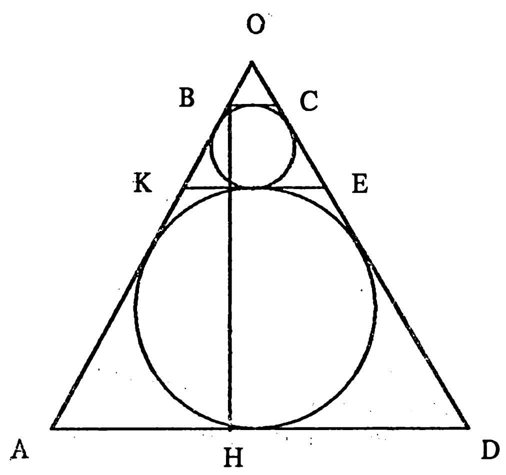


Рис. 3.

Складывая эти два равенства, получаем, что

$$|AD| + 2\,|KE| + |BC| = 2\Big(|AK| + |BK|\Big) = 2\,|AB|.$$

Следовательно,

$$|KE| = \frac{2|AB| - |AD| - |BC|}{2} = \frac{50 - 32 - 2}{2} = 8.$$

Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O и обозначим радиус окружности, вписанной в трапецию KBCE, через R_1, а радиус окружности, вписанной в трапецию AKED, через R_2. Тогда первая из этих окружностей вписана в треугольник KEO, а вторая — в треугольник ADO. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{|KE|}{|AD|} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4},$$

т.е. $R_2 = 4R_1$. Кроме того, $2R_2 + 2R_1 = 10R_1 = |BH|$. Используя стандартную технику нахождения высоты равнобедренной трапеции, получаем:

$$|AH| = \frac{|AD| - |BC|}{2} = \frac{32 - 2}{2} = 15,$$

$$|BH| = \sqrt{|AB|^2 - |AH|^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

Следовательно, $10R_1 = 20$, т.е. $R_1 = 2$ и $R_2 = 8$.

Ответ: 2 см и 8 см.

Задачи для самостоятельного решения

1. Радиусы вписанной и описанной окружностей для прямоугольного треугольника относятся как 1:4. Найти углы треугольника.

2. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 4 см. Окружность радиуса 1 см касается одного из катетов, гипотенузы и первой окружности. Найти стороны треугольника.

3. Одна из сторон треугольника равна 4 см, сумма двух других сторон равна 11 см, а радиус описанной окружности — $\frac{8}{\sqrt{7}}$ см. Найти длины сторон треугольника.

4. В прямоугольный треугольник с гипотенузой AB длиной 5 см вписана окружность радиуса 1 см, а длина катета AC больше длины катета BC. Найти радиус окружности, касающейся стороны AC и продолжений гипотенузы AB за вершину A, а стороны BC — за вершину C.

5. В трапецию, у которой меньшее основание равно 6 см, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки длиной 9 см и 4 см. Найти площадь трапеции.

Занятие № 16

Задачи с использованием элементов математического анализа

Правила дифференцирования:

$$(u + v)' = u' + v',$$

$$(ku)' = ku',$$

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$\big(u(v(x))\big)' = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

Здесь $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, k — константа.

Производные основных элементарных функций:

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Условия монотонности функции: если производная $f'(x)$ положительна на интервале (a, b), то функция $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале, если производная $f'(x)$ отрицательна на интервале (a, b), то функция $f(x)$ монотонно убывает на этом интервале.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x, то в этой точке производная $f'(x)$ равна нулю или не существует.

Достаточное условие экстремума: если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через эту точку, то точка x_0 является точкой экстремума (максимум — при перемене знака с "+" на "—", минимум — при перемене знака с "—" на "+").

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $A\,(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Задачи с использованием элементов математического анализа, учитывая, что в школьном курсе математики рассматриваются лишь простейшие понятия анализа, как правило, особых проблем не вызывают. Для успешного решения таких задач необходимо чёткое овладение навыками дифференцирования и знание обычных методов решения уравнений и неравенств.

Задача 1. *Найти интервалы монотонности функции*

$$y = x^2 e^{2x} + 4x\,e^{2x} + 2e^{2x} + 3.$$

Решение: Функция определена на всей числовой оси. Вычисляем производную, пользуясь формулами производной суммы, произведения и формулой производной сложной функции, в соответствии с которой

$$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}\cdot(2x)' = 2e^{2x}.$$

Получаем:

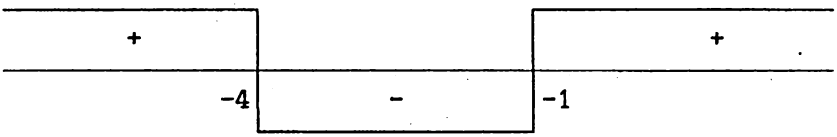
$$y' = 2xe^{2x} + x^2\cdot 2\cdot e^{2x} + 4e^{2x} + 4x\cdot 2e^{2x} + 2\cdot 2\cdot e^{2x} =$$

$$= (2x^2 + 10x + 8)\,e^{2x} = 2e^{2x}(x^2 + 5x + 4)\,.$$

Для определения знака производной используем метод интервалов. Поскольку $2e^{2x} > 0$ при всех x, достаточно найти корни уравнения

$$x^2 + 5x + 4 = 0.$$

Это даёт $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. Получаем



Следовательно, $y' > 0$ при $x < -4$ или при $x > -1$, и $y' < 0$ при $-4 < x < -1$.

Ответ: Возрастает на интервалах $(-\infty, -4)$ и $(-1, +\infty)$, убывает на интервале $(-4, -1)$.

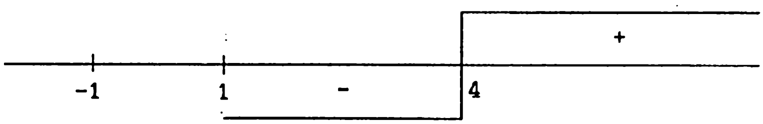
Задача 2. *Определить экстремумы функции*

$$y = x^2 - 4x - 12\ln(x-1).$$

Решение: По свойствам логарифма функция определена при $x > 1$. Вычисляя производную, получаем:

$$y' = 2x - 4 - \frac{12}{x-1} = \frac{2x^2 - 6x - 8}{x-1} = \frac{2(x^2 - 3x - 4)}{x-1}.$$

Приравнивая y' нулю, находим корни производной: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Второй из этих корней является посторонним, т.к. не входит в область определения функции. Использование метода интервалов (только при $x > 1$) даёт



Следовательно, единственная точка, в которой производная обращается в ноль, является точкой минимума.

Ответ: Минимум при $x = 4$.

Задача 3. *Определить множество значений функции*

$$y = 2\cos 3x - 9\cos 2x - 18\cos x.$$

Решение: Для того, чтобы определить множество значений, найдём сначала экстремумы функции. Имеем

$$y' = -6\sin 3x + 18\sin 2x + 18\sin x.$$

Определяем корни производной, используя формулу

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,.$$

Получаем, что $y' = 0$ при

$$-18\sin x + 24\sin^3 x + 36\sin x\cos x + 18\sin x = 0$$

или, после приведения подобных членов и сокращения на 12,

$$\sin x\,(2\sin^2 x + 3\cos x) = 0.$$

Уравнение распадается на два: $\sin x = 0$, т. е. $x = \pi n$, или

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0.$$

Выражая $\sin x$ через $\cos x$ по основному тригонометрическому тождеству, получаем уравнение

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$$

Замена $z = \cos x$ приводит это уравнение к виду

$$2z^2 - 3z - 2 = 0$$

с корнями $z_1 = 2$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Для x получаем уравнение $\cos x = 2$, не имеющее решений, и $\cos x = -\frac{1}{2}$, т. е.

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\,.$$

Итак, точками экстремума функции могут быть только точки $x = \pi n$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. Можно проанализировать изменение знака производной при переходе через эти точки, однако учитывая вопрос задачи, достаточно определить значения функции в этих точках. Для первой серии корней рассмотрим случаи чётного и нечётного n.

При $n = 2k$, т. е. $x = 2\pi k$,

$$y = 2\cos 6\pi k - 9\cos 4\pi k - 18\cos 2\pi k = -25.$$

При $n = 2k + 1$, т. е. $x = 2\pi k + \pi$,

$$y = 2\cos(6\pi k + 3\pi) - 9\cos(4\pi k + 2\pi) - 18\cos(2\pi k + \pi) =$$

$$= 2\cos 3\pi - 9\cos 2\pi - 18\cos\pi = 7.$$

При $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, учитывая чётность функции,

$$y = 2\cos(2\pi + 6\pi n) - 9\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi n\right) -$$

$$- 18\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) = 2\cos 0 - 9\cos\frac{4\pi}{3} - 18\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{31}{2}.$$

Таким образом, минимальное значение функции равно (-25) и достигается при $x = 2\pi k$, а максимальное равно $\dfrac{31}{2}$ и достигается при $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Ответ : $\left[-25, \dfrac{31}{2}\right]$.

Задача 4 . *Найти уравнение касательной к графику функции*

$$y = \sqrt{3x + 1}$$

в точке $(1; 2)$.

Решение: Вычисляем производную:

$$y' = \left(\sqrt{3x+1}\right)' = \left((3x + 1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

Значение производной при $x = 1$ равно $\dfrac{3}{4}$, т.е. уравнение касательной имеет вид:

$$y = 2 + \frac{3}{4}(x - 1) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Ответ: $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$.

Задача 5. *Определить точки, касательная в которых к параболе* $y = x^2 + 3x + 4$ *проходит через начало координат.*

Решение: Пусть искомая точка имеет координаты (x_0, y_0). Тогда, учитывая, что она лежит на параболе, $y_0 = x_0^2 + 3x_0 + 4$. Производная функции равна $y' = 2x + 3$, следовательно, значение производной в точке x_0 равно $2x_0 + 3$. Получаем уравнение касательной в виде

$$y = x_0^2 + 3x_0 + 4 + (2x_0 + 3)\cdot(x - x_0)\ .$$

Для того, чтобы касательная проходила через начало координат, необходимо, чтобы значения $x = 0$ и $y = 0$ удовлетворяли этому уравнению. Получаем для x_0 уравнение

$$0 = x_0^2 + 3x_0 + 4 + (2x_0 + 3)\cdot(-x_0)\ .$$

Следовательно, $x_0^2 = 4$, т.е. $x = \pm 2$. Чтобы получить координаты точки на параболе, необходимо вычислить соответствующие значения y_0 . Если $x_0 = 2$, то $y_0 = 14$, если $x_0 = -2$, то $y_0 = 2$.

Ответ: A(2; 14), B(- 2; 2).

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить интервалы монотонности функции

$$y = e^{2x} + 4e^x - 6x + 4.$$

2. Определить интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y = \frac{3x^2 + 2x + 11}{x + 1}\ .$$

3. Определить наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 6\sin x - 3\sin 2x + 2\sin 3x.$$

4. При каком значении b касательная к графику функции

$$y = x^2 + bx + 4,$$

проведённая в точке, соответствующей $x = 3$,
а) параллельна прямой $y = -2x + 4$?
б) проходит через точку (1, 1) ?

Занятие № 17

Решение типовых вариантов вступительных экзаменов в Московский государственный авиационный технологический университет (МАТИ им. К.Э. Циолковского)

Подводя итог рассмотрению методов решения задач вступительных экзаменов, рассмотрим полностью решение вариантов, предлагавшихся на вступительных экзаменах в Московский государственный авиационный технологический университет (МАТИ им. К.Э. Циолковского) в 1991-1993 годах, остановившись в связи с этим на вопросе оформления экзаменационной работы. Сразу же следует отметить, что формальная сторона записи решения не имеет принципиального значения. К сожалению, в школах порой внешней стороне оформления работы уделяется излишнее внимание, на самом же деле важно лишь то, чтобы решение было правильным с математической точки зрения. Разумеется аккуратность в записи решения очень желательна, но главным всё же является содержание, а не форма.

Не имеет однозначного ответа и вопрос о степени подробности комментариев к решению. Бывают ситуации, когда словесные комментарии необходимы (например, при ссылке на некоторую теорему при решении геометрических задач), но в большинстве случаев можно обойтись лишь необходимыми выкладками. Разумеется, если абитуриент объясняет каждое преобразование, это ни в коей мере не является недостатком. В связи с этим в приведённых ниже решениях двух вариантов вступительных работ реализованы два крайних случая: для первого варианта приводится максимально подробное объяснение каждого шага решения, для второго — максимально краткая (но вполне допустимая) запись решения. Выбрать свой стиль в диапазоне между этими двумя крайностями — право каждого абитуриента.

Вариант 1 (МАТИ, 1991 г.)

1. (3 балла) Решить уравнение

$$4^x + 2^{x+2} - 12 = 0.$$

2. (6 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2} \\ xy = 27 \end{cases}$$

3. (6 баллов) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x + \sin 2x - 1}{\cos^2 x - \sin 2x + 1}.$$

4. (9 баллов) При каких значениях m неравенство

$$\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$$

выполняется для любых x?

5. (12 баллов) Сумма первых четырёх членов возрастающей геометрической прогрессии равна 45, а сумма первых шести членов равна 189. Первый член арифметической прогрессии, все члены которой являются целыми числами, равен первому члену геометрической прогрессии, сумма первых 11 членов арифметической прогрессии меньше 260, а сумма первых 19 членов больше 710. Найти пятый член арифметической прогрессии.

6. (12 баллов) В прямоугольный треугольник с гипотенузой AB длиной 5 см вписана окружность радиуса 1 см, а длина катета AC больше длины катета BC. Найти радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений гипотенузы AB за вершину B, а стороны AC — за вершину C.

Решение.

1. ОДЗ $x \in R$.

Пусть $2^x = y$. Тогда $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = y^2$ и $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4y$.

Получаем уравнение

$$y^2 + 4y - 12 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 2^2 + 12 = 16,$$

$$y_1 = -2 + \sqrt{16} = 2,\ y_2 = -2 - \sqrt{16} = -6.$$

Получаем уравнения $2^x = 2$, т.е. $x = 1$, и $2^x = -6$, не имеющее корней, т.к. $2^x > 0$ для всех x.

Ответ: $x = 1$.

2. ОДЗ $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$.

Пусть $\log_x y = z$. Тогда $\log_y x = \dfrac{\log_x x}{\log_x y} = \dfrac{1}{z}$. Первое уравнение системы запишется в виде

$$z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2},$$

т.е.

$$2z^2 - 5z + 2 = 0,\ D = 5^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9,$$

$$z_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{5 + 3}{4} = 2,$$

$$z_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Рассматриваем два случая:

а) $\log_x y = 2$. Тогда $y = x^2$ и второе уравнение имеет вид

$$x\cdot x^2 = x^3 = 27,\ \text{т.е. } x = 3 \text{ и } y = 3^2 = 9.$$

б) $\log_x y = \dfrac{1}{2}$. Тогда $y = \sqrt{x}$ и второе уравнение имеет вид

$$x\cdot\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}} = 27 = 3^3,\ \text{т.е. } x = 3^2 = 9 \text{ и } y = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: (3, 9) и (9, 3).

3. ОДЗ определена условиями $\sin x \neq 0$, $\cos^2 x - \sin 2x + 1 \neq 0$.

Поскольку $\cos^2 x \geqslant 0$ и $1 - \sin 2x \geqslant 0$, равенство

$$\cos^2 x - \sin 2x + 1 = 0$$

может выполняться только в том случае, когда одновременно выполняются равенства $\cos^2 x = 0$ и $1 - \sin 2x = 0$. Но если $\cos x = 0$, то $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$. Следовательно,

$$\cos^2 x - \sin 2x + 1 > 0$$

при всех x и область допустимых значений исчерпывается условием $\sin x \neq 0$. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \sin 2x - 1}{\cos^2 x - \sin 2x + 1} =$$

$$\frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\,(2 \sin x - \cos x)}{2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}.$$

Следовательно, первая серия корней определена условием $\cos x = 0$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Эти значения входят в ОДЗ, т.к. при этом $\sin x \neq 0$.

Сократив на $\cos x$ и избавившись от знаменателя, получим уравнение

$$2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x - \sin x \cos x$$

или после приведения подобных членов — уравнение

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

Поскольку случай $\cos x = 0$ уже рассмотрен, можно считать, что $\cos x \neq 0$ и поэтому можно разделить обе части уравнения на $\cos x$. Получим уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Пусть $\operatorname{tg} x = y$. Тогда $y^2 + y - 2 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$. Получаем два уравнения: $\operatorname{tg} x = 1$, т.е. $x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n$ и $\operatorname{tg} x = -2$,

$$x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n.$$

Очевидно, что все эти решения входят в ОДЗ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in Z.$

4. Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} - 1 = \frac{x^2 + mx - 1 - 2x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 2x + 3} =$$

$$= \frac{-x^2 + (m + 2)x - 4}{2x^2 - 2x + 3}.$$

Квадратный трёхчлен в знаменателе имеет дискриминант

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20 < 0.$$

Поскольку коэффициент при x^2 положителен, это означает, что $2x^2 - 2x + 3 > 0$ при всех x. Следовательно, достаточно, чтобы $-x^2 + (m + 2)x - 4 < 0$ при всех x, а т.к. коэффициент при x^2 равен $-1 < 0$, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант был отрицателен.

$$D = (m + 2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) =$$

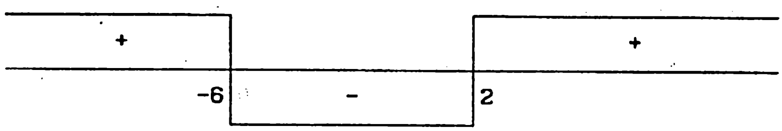
$$= m^2 + 4m + 4 - 16 = m^2 + 4m - 12.$$

$D = 0$ при $m^2 + 4m - 12 = 0$.

$$D_1 = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 64,$$

$$m_1 = \frac{-4 + 8}{2} = 2,\ m_2 = \frac{-4 - 8}{2} = -6.$$

Решаем неравенство $D < 0$ по методу интервалов:



Следовательно, $-6 < m < 2$.

Ответ: $-6 < m < 2$.

5. Пусть первый член геометрической прогрессии равен b, а знаменатель равен q. Тогда

$$S_4 = \frac{bq^4 - b}{q-1} = 45,$$

$$S_6 = \frac{bq^6 - b}{q-1} = 189.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$\frac{bq^4 - b}{q-1} \cdot \frac{q-1}{bq^6 - b} = \frac{q^4 - 1}{q^6 - 1} = \frac{(q^2-1)(q^2+1)}{(q^2-1)(q^4+q^2+1)} =$$

$$= \frac{q^2+1}{q^4+q^2+1} = \frac{45}{189} = \frac{5}{21}.$$

Обозначим q^2 через x. Получим уравнение

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{5}{21},$$

$$21x + 21 = 5x^2 + 5x + 5,$$

$$5x^2 - 16x - 16 = 0,$$

$$\frac{D}{4} = 8^2 + 5 \cdot 16 = 144 = 12^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 12}{5}, \quad x_1 = \frac{8+12}{5} = 4, \quad x_2 = \frac{8-12}{-5} = -\frac{4}{5}.$$

Следовательно, $q^2 = 4$, $q = \pm 2$, причём поскольку геометрическая прогрессия является возрастающей, подходит только значение $q = 2$ (уравнение $q^2 = -\frac{4}{5}$ решений не имеет).

Подставляя найденное значение q в уравнение для S_4, находим b:

$$\frac{bq^4 - b}{q-1} = 15b = 45, \; b = 3.$$

Таким образом, первый член арифметической прогрессии равен 3. Если d — разность арифметической прогрессии, то по условию

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{6 + 10d}{2} \cdot 11 = 33 + 55d < 260,$$

$$55d < 227, \ d < \frac{227}{55} < 5,$$

$$S_{19} = \frac{2a_1 + 18d}{2} \cdot 19 = \frac{6 + 18d}{2} \cdot 19 = 57 + 171d > 710,$$

$$171d > 653, \ d > \frac{653}{171} > 3.$$

Поскольку по условию d — целое, то $d = 4$ и $a_5 = a_1 + 4d = 19$.

Ответ: 19.

6. Смотри рис. 1.

$|AB| = 5$, $|O_1K| = |O_1D| = 1$, O_1K перпендикулярен AC, O_1D перпендикулярен BC, O_2M перпендикулярен AC, O_2N перпендикулярен BC.

Пусть $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c = 5$.

Используем формулы

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b - 5}{2} = r = 1,$$

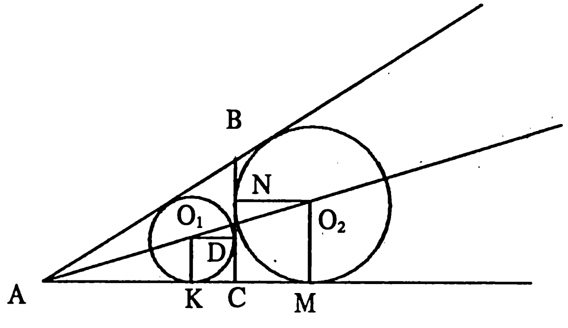


Рис. 1.

$$a^2 + b^2 = c^2 = 25.$$

Выражая из первого равенства a через b, получаем: $a = 7 - b$. Подставляя во второе уравнение, получаем

$$(7 - b)^2 + b^2 = 2b^2 - 14b + 49 = 25,$$

$$b^2 - 7b + 12 = 0,$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 = 1,$$

$$b_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}, b_1 = 3, b_2 = 4,$$

$$a_1 = 4, a_2 = 3.$$

Поскольку по условию $a < b$, получаем, что $|AC| = 4$, $|BC| = 3$.

Пусть $|O_2M| = x$. Тогда $|AM| = 4 + x$, $|AK| = |AC| - |O_1D| = 3$. Треугольники AO_1K и AO_2M подобны по двум равным углам, следовательно

$$\frac{|O_1K|}{|O_2M|} = \frac{|AK|}{|AM|},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{4 + x}, \ 4 + x = 3x, \ 2x = 4, \ x = 2.$$

Ответ: 2 см.

Вариант 2 (МАТИ, 1993 г.)

1. (6 баллов) Решить уравнение

$$\log_2 (x - 2) + \log_2 (x + 1) = 2.$$

2. (6 баллов) Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^2 + 8x + 10 \ln \frac{4}{x} + 3.$$

3. (6 баллов) Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x.$$

4. (9 баллов) С бассейном соединены две трубы: подводящая и отводящая, причём заполнение пустого бассейна через первую трубу продолжается на четыре часа меньше, чем освобождение полного бассейна через вторую трубу. При каких значениях времени заполнения бассейна через первую трубу пустой бассейн будет заполнен не ранее, чем через 24 часа, при открытых одновременно двух трубах ?

5. (12 баллов) Найти все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x + 2} = 1$$

имеет решение.

6. (12 баллов) В треугольнике ABC площадью 40 см^2 биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и DC , причём $|BD| : |DC| = 3 : 2$. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E. Найти площадь четырёхугольника EDCK.

Решение.

1. ОДЗ $x > 2$, $x > -1$, т.е. $x > 2$.

$$\log_2 (x - 2)\cdot(x + 1) = \log_2 4,$$

$$(x - 2)(x + 1) = 4,$$

$$x^2 - 2x + x - 2 = 4, \quad \text{т.е.} \quad x^2 - x - 6 = 0,$$

$$D = 1 + 4\cdot 6 = 25,$$

$x_1 = \dfrac{1 + 5}{2} = 3$, $x_2 = \dfrac{1 - 5}{2} = -2$ — не входит в ОДЗ.

Ответ: $x = 3$.

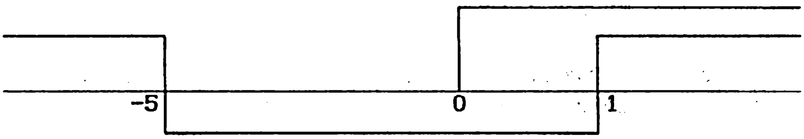
2. Область определения $x > 0$.

$$y = x^2 + 8x + 10\ln 4 - 10\ln x + 3,$$

$$y' = 2x + 8 - \frac{10}{x} = \frac{2x^2 + 8x - 10}{x},$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{4+5} = -2 + 3 = 1,\ x_2 = -2 - 3 = -5.$$



Ответ: Функция возрастает при $x > 1$ и убывает при $0 < x < 1$.

3.

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \sin^4 2x + \cos^4 2x,$$

$$\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} = \sin^4 2x + \cos^4 2x,$$

$$\frac{1+\cos^2 2x}{2} = \left(1 - \cos^2 2x\right)^2 + \left(\cos^2 2x\right)^2,$$

$$y = \cos^2 2x,$$

$$\frac{1+y}{2} = (1-y)^2 + y^2,\ \frac{1+y}{2} = 1 - 2y + 2y^2,\ 1 + y = 2 - 4y + 4y^2,\ 4y^2 - 5y + 1 = 0,$$

$$y_1 = \frac{5+\sqrt{25-16}}{8} = \frac{5+3}{8} = 1,\ y_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\cos^2 2x = 1,\ \sin^2 2x = 0,\ 2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2},$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{4},\ \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{4},\ \cos 4x = -\frac{1}{2},\ 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}.$$

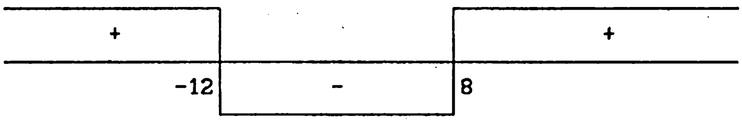
Ответ: $x = \frac{\pi n}{2},\ x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$

4. Пусть x — время заполнения бассейна через первую трубу, $x + 4$ — время освобождения бассейна через вторую трубу. Тогда за один час через первую трубу заполняется $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а через вторую освобождается $\frac{1}{x+4}$ часть.

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} \leqslant 1,$$

$$24x + 96 - 24x \leqslant x^2 + 4x, \qquad x^2 + 4x - 96 \geqslant 0,$$

$$x_1 = -2 + \sqrt{4 + 96} = -2 + 10 = 8, \; x_2 = -2 - 10 = -12.$$



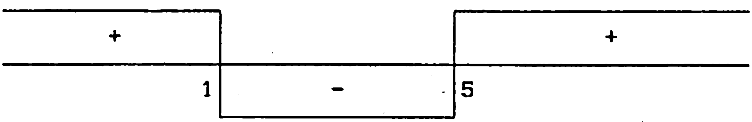
Ответ: При значениях времени, не меньших, чем 8 часов.

5. ОДЗ $x \geqslant -a$, $x \geqslant -2$. $\sqrt{x+a} = 1 - \sqrt{x+2}$. Решение существует только при $1 - \sqrt{x+2} \geqslant 0$, $\sqrt{x+2} \leqslant 1$, $x + 2 \leqslant 1$, $x \leqslant -1$.

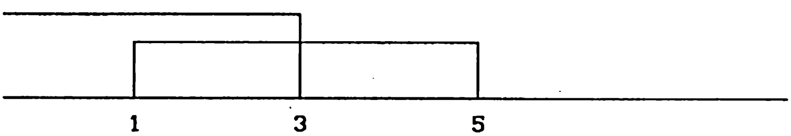
$x + a = 1 - 2\sqrt{x+2} + x + 2$ (автоматически $x + a \geqslant 0$), $2\sqrt{x+2} = 3 - a$. Решение существует только при $3 - a \geqslant 0$, $a \leqslant 3$. Возводим в квадрат: $4(x + 2) = 9 - 6a + a^2$ (автоматически $x + 2 \geqslant 0$).

$$x = \frac{1 - 6a + a^2}{4} \leqslant -1, \; \frac{a^2 - 6a + 5}{4} \leqslant 0,$$

$$a_1 = 3 + \sqrt{9 - 5} = 5, \; a_2 = 3 - 2 = 1.$$



Вместе с условием $a \leqslant 3$:



Ответ: $1 \leqslant a \leqslant 3$.

6. Смотри рис. 2.

$S_{ABD} : S_{ADC} = 3 : 2$, $S_{ABD} = \frac{3}{5} S_{ABC} = 24$, $S_{ABK} = \frac{1}{2} S_{ABC} = 20$.

$|AB| : |AC| = |BD| : |DC| = 3 : 2$, т.е. $|AC| = \frac{2}{3} |AB|$.

$|AK| = \frac{1}{2} |AC| = \frac{1}{3} |AB|$, $|BE| : |EK| = |AB| : |AK| = 3 : 1$,

следовательно, $S_{AEK} = \frac{1}{4} S_{ABK} = 5$.

$S_{EDCK} = S_{ABC} - S_{ABD} - S_{AEK} = 40 - 24 - 5 = 11$.

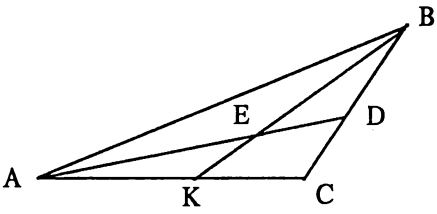


Рис. 2.

Ответ: 11 см^2.

Занятие № 18

Анализ типичных ошибок абитуриентов

По хорошей русской пословице "знать бы, где упадёшь — соломки бы подстелил" полезно учитывать то, в каких ситуациях наиболее часто абитуриенты допускают ошибки, для того, чтобы обратить на такие моменты особое внимание. Проведём такой анализ по типам задач.

Решение квадратного уравнения является, пожалуй, той задачей, с которой без проблем справляются все абитуриенты. Единственное затруднение здесь вызывает иногда то, что, привыкнув к целочисленным корням, некоторые незадачливые решатели теряются, когда дискриминант не является полным квадратом и тогда даже заявляют, что в этом случае решений нет.

В уравнениях с модулем наиболее типичной ошибкой является неправильное выписывание условий, при которых раскрывается модуль: пишется $x \geqslant 0$ и $x < 0$ вне зависимости от того, какое выражение стоит под знаком модуля, и не учитываются условия, при которых раскрывается модуль. На последнее следует обращать особое внимание.

Стандартные ошибки при решении иррациональных уравнений — это неучёт ОДЗ (часто её даже забывают выписать) и отсутствие проверки. Следует помнить, что именно для таких задач она бывает необходима, поскольку при возведении обеих частей уравнения в квадрат часто возникают посторонние корни. При решении логарифмических и показательных уравнений порой делаются совсем уж дикие ошибки. Например, используются "формулы" типа $\log(a + b) = \log a + \log b$ или вместо $2^x + 2^3$ пишется просто $x + 3$, но такие "ляпы" допускают лишь совершенно неподготовленные абитуриенты, которые не могут рассчитывать на успешную сдачу экзамена. Из ошибок, которые допускают более знающие люди, вновь можно обратить внимание на неучёт ОДЗ. Это порой делается по забывчивости, из-за естественного экзаменационного волнения, но тем не менее остаётся грубой ошибкой с печальными последствиями.

Иногда (аналогично ситуации с квадратными уравнениями) подводит привычка к "круглым" ответам, в связи с чем уравнение, например, $2^x = 3$ либо не решается вообще, либо решается неверно. Основные формулы $x = \log_a b$ для уравнения $a^x = b$ и $x = a^b$ для уравнения $\log_a x = b$ надо помнить твёрдо.

Метод интервалов при решении неравенств с идейной стороны особых трудностей, как правило, не вызывает. Зато количество технических, арифметических ошибок при этом, пожалуй, больше, чем при решении любых других задач. Одной из причин этого представляется привычка определять знак функции в различных интервалах непосредственной подстановкой какого-либо значения из этого интервала вместо анализа знаков. Помимо возможности арифметической ошибки при вычислении значения функции, иногда бывает, что берётся значение из другого интервала — особенно, если разделяющие их числа являются иррациональными. Метод анализа изменения знаков (разумеется, при правильном его использовании) представляется гораздо более надёжным.

Главной проблемой при решении тригонометрических задач является недостаточное владение формулами тригонометрических преобразований. Понятно, что запомнить большое количество формул непросто, тем более, надо не только знать их, но и уметь выбрать самую полезную в конкретной ситуации. Зубрёжка, а тем более использование шпаргалок (приводящее, как правило, к фатальному исходу) здесь не помогут, единственное реальное средство — решение достаточно большого количества задач так, чтобы формулы «запомнились сами».

Одной из самых распространённых ошибок при решении тригонометрических уравнений является потеря корней при сокращении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную, которое может само обращаться в ноль. Такой приём, вообще говоря, вполне допустим, надо лишь не забывать, что при этом получается дополнительное уравнение, корни которого являются корнями исходного.

К сожалению, достаточно часто встречается небрежная запись окончательного решения в тригонометрических уравнениях. Особенно обидно, когда, преодолев действительные трудности, абитуриенты спотыкаются "на ровном месте", то забывая поставить $\pm$ перед арккосинусом или $(-1)^n$ перед арксинусом, то неверно пишут решения простейших уравнений типа $\sin x = 1$ или $\cos x = 0$, а иногда даже позволяют себе такие "вольности", как преобразование вида $\operatorname{arctg} 2 = 2\operatorname{arctg} 1$, что является очень грубой ошибкой.

В задачах, связанных с прогрессиями, пожалуй, решающее значение имеет такой тривиальный факт как знание основных формул. Причём в отличие от тригонометрических количество формул здесь совсем невелико. Выбрать из них нужную не представляет проблемы — в общем, надо их просто знать. Здесь, на худой конец, сгодится и тривиальная зубрёжка.

При решении текстовых задач, несмотря на то, что по своей математической сути они достаточно близки к задачам на прогрессии, ситуация, пожалуй, прямо противоположная: какая-либо зубрёжка просто бессмысленна, всё зависит от умения решать такие задачи. Как правило, получается так, что либо задача решается, либо дело не доходит даже до составления уравнений (исключение — арифметические ошибки). Предложить здесь какие-либо конкретные рекомендации трудно: надо внимательнее читать и осмысливать условия задачи, не пропуская ничего из того, что задано. И, разумеется, побольше тренироваться в решении таких задач — но это пожелание относится ко всему.

В отношении геометрических задач главной проблемой также являются не непосредственно ошибки, а неумение найти правильный метод решения. Тем не менее, можно отметить достаточно часто встречающиеся ошибки, основанные на использовании геометрических соображений, не вытекающих из условия задачи. Нередко к этому подталкивает неудачно выполненный чертёж: например, если изображается равнобедренный треугольник, хотя по условию задачи он таким не является, может возникнуть желание использовать свойства равнобедренного треугольника, не имеющие места в данной ситуации. Для того, чтобы избежать ошибок такого рода, необходимо тщательнее следить за геометрическим обоснованием проводимых рассуждений.

Задачи с параметром трудны скорее психологически, чем реально, и большая часть ошибок в их решении связана скорее с недостаточным знакомством с такого рода задачами. Кроме того, не все достаточно хорошо знают условия знакопостоянства функций, особенно в отношении квадратного трёхчлена: то, что, кроме отрицательности дискриминанта, требуется ещё и знакопостоянство коэффициента при x^2.

Занятие № 19

Варианты для самостоятельного решения

Приведённые варианты предлагались на вступительных экзаменах по математике в Московском государственном авиационном технологическом университете (МАТИ им. К.Э. Циолковского) в 1990 и 1991 годах.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7} = x + 1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2 x - 3\cdot\lg x + 8}{\lg x + 1} < 2.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 13x = \sin 8x.$$

4. Сумма третьего и тринадцатого членов возрастающей арифметической прогрессии равна 8, а их произведение равно $\frac{31}{16}$. Найти сумму первых двадцати членов этой прогрессии.

5. Сторона треугольника равна 5, сумма двух других сторон равна 13, а радиус вписанной в треугольник окружности равен $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Найти угол, противолежащий заданной стороне треугольника.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$|x - 1| = 2x - 4.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{6}{2^{x+1} - 1} - \frac{1}{2^x - 1} > 1.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 4x + \sin 4x + \sqrt{2} \cos 6x = 0.$$

4. Мотоциклист отправляется из А в В. Расстояние от А до В равно 100 км. Не задерживаясь в В, он едет обратно с той же скоростью, но через полчаса после выезда из В делает остановку на 15 мин. После этого мотоциклист продолжает путь, увеличив скорость на 10 км/час. Чему равна скорость мотоциклиста на пути из А в В, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь из А в В.

5. В остроугольном треугольнике основание равно 13 см, а высоты, проведённые к боковым сторонам, — 12 см и 11,2 см. Найти длины боковых сторон треугольника.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$4^x - 2^{x+2} - 32 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$|x^2 + 4x - 1| < 4.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 5x - \sin 3x = \sin x.$$

4. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как один из них проработал 2 часа, а второй — 5 часов, оказалось, что они выполнили половину всей работы. Проработав совместно ещё 3 часа, они установили, что им осталось выполнить 0,05 всей работы. За какое время каждый из них, работая отдельно, может выполнить все задание?

5. Найти углы равнобедренного треугольника, если основание относится к биссектрисе угла при основании как 5:6.

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$3^{x+1} - 9\cdot 3^{-x} = 26.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(x^2 + y^2\right) = \log^2 5 \\ 7\cdot\log_2 x + 2\cdot\log_2 y = 1 \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 5\sin 2x.$$

4. При каких значениях a выражение

$$\sqrt{(a+1)\cdot x^2 + 7x + 4a + 4}$$

принимает вещественные значения для любых x?

5. Второй член геометрической прогрессии равен 6, а пятый равен 48. Первый член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен первому члену геометрической прогрессии, седьмой член арифметической прогрессии меньше пятого члена геометрической прогрессии, а четырнадцатый — больше шестого члена геометрической прогрессии. Найти седьмой член арифметической прогрессии.

6. В равнобедренный треугольник с основанием АС длиной 10 см вписана окружность радиуса $\frac{10}{3}$ см. Найти радиус окружности, которая касается стороны АС и продолжений боковых сторон АВ за вершину А и ВС за вершину С.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$|2x + 3| = 3x + 2.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ x + 2 - \log_2(9^y + 7) = 0 \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$(\sin x - \cos x)^2 + \cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}\sin 4x.$$

4. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - (3a + 1)\cdot x + (2a^2 + 4a - 6) = 0$$

меньше (-1)?

5. Сумма двух натуральных чисел равна 59, их произведение меньше 688, а частное от деления большего числа на меньшее не превосходит 3. Найти эти числа.

6. В равнобедренной трапеции ABCD длина основания AD равна 14 см, а длина основания BC — 2 см. Окружность касается сторон AB, BC и CD, причём боковая сторона делится точкой касания в отношении 1:9, считая от меньшего основания. Найти радиус окружности.

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3 - x} = 2x + 4.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 4 \\ 7\cdot\log_3 x - \log_3(y + 1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\sin^6 x - \cos^6 x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 1.$$

4. При каких значениях m неравенство

$$\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$$

выполняется для любых x?

5. Из городов А и Б одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями выезжают два автомобиля, которые встречаются через 6 часов, причём один из них может преодолеть весь путь на 5 часов быстрее, чем второй. Определить все те значения времени, в течение которых расстояние между автомобилями не превышает половины пути из А в Б.

6. В равнобедренной трапеции длины оснований равны 7 см и 1 см, длины боковых сторон — 4 см. Окружность касается боковых сторон и меньшего основания трапеции. Найти длину отрезка, касательного к окружности и параллельного основаниям.

Занятие № 20

Варианты для самостоятельного решения

Приведённые варианты предлагались на вступительных экзаменах по математике в Московском государственном авиационном технологическом университете (МАТИ им. К.Э. Циолковского) в 1992 и 1993 годах.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_3\left(3^{x+1} + 18\right) = 2x.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

$$y = e^{4x} - 12\cdot e^{2x} - 28x + 12.$$

3. Решить уравнение

$$4\cos^2 2x\cdot\sin^2 4x + \cos 4x\cdot\cos 8x = 0.$$

4. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$3\sqrt{x-2} = x + k$$

имеет решение.

5. Бассейн заполняется через две трубы, причём если открыть обе, то заполнение бассейна потребует не более трёх часов. Если же заполнять бассейн только через первую трубу, на это потребуется на восемь часов больше, чем через вторую трубу. Какие значения может принимать время заполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AK и BD пересекаются в точке O. Площадь треугольника AOD равна 3 см^2, а площадь треугольника BOK — 8 см^2. Найти длины сторон треугольника ABC.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_2 (x + 2) + \log_2 (x + 3) = 2 + \log_2 3.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

$$y = \frac{x^2 - x - 5}{x - 3}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^6 x - \cos^6 x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 1.$$

4. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$4^x + k \cdot 2^{x+2} + 4k + 8 = 0$$

имеет единственное решение.

5. Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 180 км, выезжает автомобиль. Через час после отправления он из-за поломки делает остановку на полчаса, а затем продолжает движение, увеличив скорость на 20 км/час. При каких значениях первоначальной скорости автомобиля он может прибыть в Б не позже запланированного срока ?

6. Площадь трапеции ABCD равна 24 см^2, а длины оснований AD и BC относятся как 3 : 1. Вершины A и D соединены отрезками с точкой N — серединой стороны BC, а вершины B и C — с точкой M, серединой стороны AD. Отрезки AN и BM пересекаются в точке E, а отрезки DN и CM — в точке K. Найти площадь четырехугольника ENKM.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$x^{\lg x + 4} = x^3.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

$$y = (x + 2)\cdot\left(3x - \sqrt{x + 2}\right) + 24x + 22.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}.$$

4. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$\sin^2 x - 5\cos x + k = 0$$

имеет решение.

5. Пешеход должен пройти на станцию к поезду, который отправляется в 9 часов 40 минут. Дорога состоит из участка по ровному месту длиной в 6 км и в гору длиной 3 км, причём скорость движения в гору на 1,5 км/час меньше, чем по ровному месту. При каких значениях скорости хотьбы по ровному месту пешеход, выходя их дома в 8 часов, успеет на поезд ?

6. В трапеции ABCD длины оснований AD и BC относятся как 2:1. На стороне AB выбрана точка K так, что $|AK| : |KB| = 1:2$, а на стороне CD — точка L так, что $|CL| : |LD| = 1:2$. В каком отношении отрезок KL делит диагональ AC ?

Вариант 4

1. Решить уравнение

$$\log_2 2^x + 6 = 2x.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

$$y = 2x\cdot e^{2x} - 4x\cdot e^x - e^{2x} + 4\cdot e^x - 4x^2 + 2.$$

3. Решить уравнение

$$2\sin 2x + \sin x + \cos x + 1 = 0.$$

4. Маршрут теплохода состоит из участка длиной 20 км по озеру и участка длиной 14 км вниз по течению реки, причём скорость течения равна 4 км/час. При каких значениях скорости теплохода в спокойной воде общая продолжительность плавания не превысит 1 часа 20 минут?

5. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$x + 2k\sqrt{x+1} - k + 3 = 0$$

имеет решение.

6. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC через вершину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K, причём $|BE| : |ED| = 1 : 2$ и $|CK| : |KD| = 1 : 4$. Найти отношение длин оснований трапеции.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$4^{-x+0,5} - 7\cdot 2^{-x} - 4 = 0.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

$$y = x^2 + 10x + 42\cdot\ln\frac{6}{x+1} + 7.$$

3. Решить уравнение

$$8\sin^2 x\cdot\sin^2 2x = \cos 6x.$$

4. Имеется два сплава меди с другими металлами, причём процентное содержание меди во втором сплаве на 12% больше, чем в первом. Для создания нового сплава берётся кусок первого сплава, содержащий 15 кг меди, и кусок второго сплава, содержащий 9 кг меди. Найти все возможные значения процентного содержания меди в первом сплаве, при которых полученный новый сплав будет содержать не менее 64% меди.

5. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$x^4 - kx^2 + k - 2 = 0$$

имеет решение.

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC основание высоты AD делит боковую сторону BC так, что $|BD| : |DC| = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. Найти углы треугольника.

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$9^{x^2} + 3^{x^2+2} - 10 = 0.$$

2. Определить промежутки монотонности функции

$$4x^2 + 6x + 2\cdot\ln\frac{3}{x} + 4.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 7x + \sin 8x = 6\sin 4x.$$

4. Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 576 км, выезжает автомобиль, а через полчаса навстречу ему из Б выезжает второй автомобиль, имеющий скорость на 8 км/час большую, чем у первого. При каких значениях скорости второго автомобиля место встречи будет располагаться ближе к Б, чем к А?

5. Найти все значения параметра k, при которых уравнение

$$\log_3(x+5) + \log_3(x+1) = \log_3(x+k-1)$$

имеет решение.

6. Площадь трапеции ABCD равна 32 см^2, а длины оснований AD и BC относятся как 2 : 1. На боковой стороне CD выбрана точка K так, что $|CK| : |KD| = 1 : 3$, а на основании AD — точка E так, что отрезок KE параллелен стороне AB. Найти площадь многоугольника ABCKE.

Содержание